

Загадочный ротор

Понятие ротора является одним из наиболее трудно усваиваемых в векторном анализе. Причина тому, на мой взгляд, в том, что авторы университетских учебников, как правило, не ищут легких путей для читателя, стараясь при этом максимально облегчить задачу себе. Они излагают материал преимущественно с формальных позиций, а при таком подходе даже понять что такое ротор весьма проблематично. Неудобства данного подхода легко проиллюстрировать на хорошо известном продвинутому школьнику понятии векторного произведения. Его также можно определить формально, через выражение в декартовых координатах:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (0)$$

Но будет ли при этом сразу понятно, что представляет собой векторное произведение? Не факт, что оно вообще будет вектором, поскольку коэффициенты при ортах в правой части (0), будучи координатами векторов, зависят от выбора системы координат. Но если векторное произведение — это все-таки вектор, то он должен как-то зависеть от векторов-сомножителей. Однако в (0) эта зависимость ну никак не прослеживается. Таким образом, определять векторное произведение координатным способом, по меньшей мере, неудобно. В то же время существует простое и хорошо известное геометрическое определение векторного произведения с помощью синуса угла между векторами-сомножителями и правого винта. Оно решает все поставленные выше вопросы. Такой же геометрический путь возможен в векторном анализе, и мы пойдем этим путем.

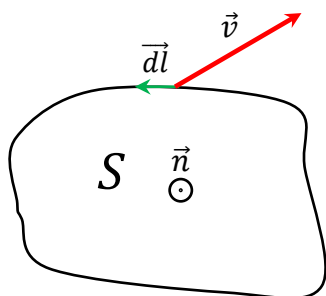


Рис. 1

Итак, пусть из каждой точки некоторой области пространства определенным образом проведен вектор. Множество всех векторов, проведенных таким образом, обозначим одной буквой (например, \vec{v}) и будем говорить, что в данной области задано поле вектора \vec{v} . Можно сказать, что \vec{v} является функцией пространственных координат точек этой области:

$$\vec{v} = \vec{v}(x; y; z). \quad (1)$$

Рассмотрим вектор

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{v} = \vec{n} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{v} d\vec{l}}{S} = \vec{n} \frac{\oint_{dL} \vec{v} d\vec{l}}{dS}. \quad (2)$$

Здесь интеграл, называемый *циркуляцией*, берется вдоль контура L , ограничивающего некоторую плоскую поверхность площади S , \vec{n} — единичная правая нормаль контура (рис. 1). Предполагается, что контур стягивается к некоторой лежащей внутри него точке. $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{v}$ — это еще не сам ротор, но уже его составляющая, коллинеарная нормали. Можно ввести понятие *векторной циркуляции* вектора \vec{v} по данному элементарному контуру:

$$\vec{dC}_{\vec{n}} = \vec{n} \oint \vec{v} d\vec{l}, \quad (2')$$

Тогда (2) запишется короче:

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{v} = \frac{\vec{dC}_{\vec{n}}}{dS}. \quad (2, a)$$

Почему и при каких условиях $\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v}$ является определенным вектором? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем сначала узкий, элементарный, прямоугольный контур ($\partial x \ll \Delta y$), ориентированный по осям X и Y декартовой системы координат (рис. 2). Тогда нормалью контура будет орт \vec{k} . Для проекции $\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v}$ на ось Z имеет место следующая очевидная цепочка преобразований:

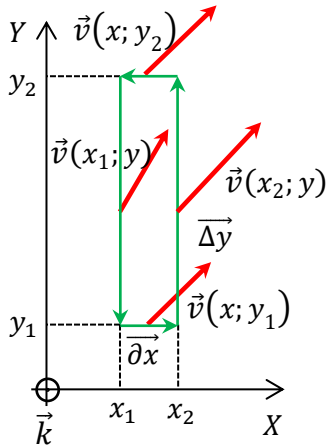


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 (\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v}(x; y))_z &= \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v_x(x; y_1) \partial x + \int_{y_1}^{y_2} v_y(x_2; y) \partial y - v_x(x; y_2) \partial x + \int_{y_2}^{y_1} v_y(x_1; y) \partial y}{\partial x \Delta y} = \\
 &= -\frac{\partial v_x}{\partial y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v_y}{\partial x} \partial y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \rangle \int_{y_1}^{y_2} \partial y}{\Delta y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Тогда в векторном виде

$$\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v}(x; y) = \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (4)$$

Возьмем теперь элементарный контур в форме узкой трапеции (рис. 3). Для элемента, неколлинеарного оси X , имеет место соотношение:

$$\vec{dl} = \vec{\partial x} + (-\vec{\partial y}). \quad (5)$$

Тогда при вычислении циркуляции участок BC будет пройден дважды и в противоположных направлениях, поэтому соответствующие вклады взаимно сократятся; то же произойдет с участком DE . Таким образом, трапециевидный элементарный контур сводится к прямоугольному (разница между площадями контуров в пределе исчезает).

И наконец, в произвольный плоский контур мы можем вписать трапециевидные элементы. Циркуляция по любому m -му элементу, согласно (2) и (3) равна

$$C_m = (\oint \vec{v} \vec{dl})_m = \left(\left\langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_m S_m, \quad (6)$$

где S_m — площадь m -го элемента. При сложении циркуляций вдоль вписанных элементов каждый внутренний участок (типа MN) будет пройден дважды и в противоположных направлениях, поэтому в итоге «выживут» лишь вклады, обусловленные элементами самого криволинейного контура, то есть мы получим циркуляцию вдоль всего контура. Следовательно

$$(\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v})_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sum C_m S_m}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sum \left(\left(\left\langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_m S_m \right)}{S} =$$

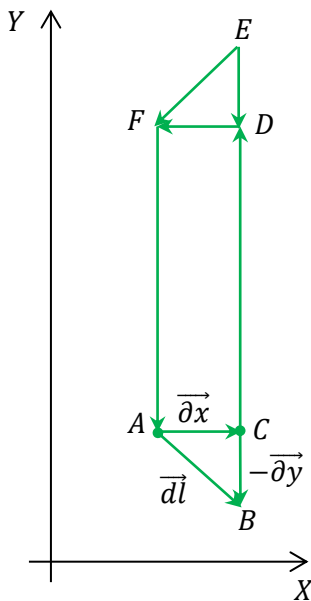


Рис. 3

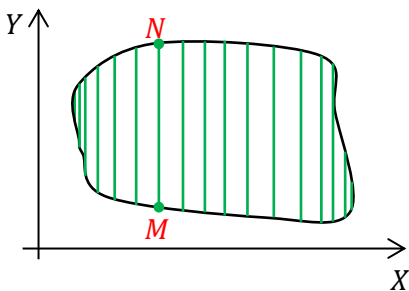


Рис. 4

$$= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\langle \langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y} \rangle \Sigma S_m}{S} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (7)$$

Таким образом, независимо от формы контура, предел (2) определяется соотношением (4). Стало быть, при существовании соответствующих частных производных, данный предел существует. С другой стороны, он лишь выражается через частные производные проекций вектора, но определяется самими векторами \vec{v} и \vec{dl} а также площадью, ограниченной контуром. Следовательно, предел (2) в действительности не зависит от системы координат. Поэтому

$$\text{rot}_{\vec{k}} \vec{v} = \vec{k} \lim_{S_{XY} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{XY}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{XY}} \quad (8, a)$$

является вектором. Аналогичным образом

$$\text{rot}_{\vec{i}} \vec{v} = \vec{i} \lim_{S_{YZ} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{YZ}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{YZ}} \quad (8, б)$$

и

$$\text{rot}_{\vec{j}} \vec{v} = \vec{j} \lim_{S_{ZX} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{ZX}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{ZX}} \quad (8, в)$$

также являются векторами. Значит, вектором будет и сумма: $\text{rot}_{\vec{i}} \vec{v} + \text{rot}_{\vec{j}} \vec{v} + \text{rot}_{\vec{k}} \vec{v}$. Вот это и есть ротор вектора \vec{v} . Таким образом, по определению

$$\text{rot } \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{i} \lim_{S_{YZ} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{YZ}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{YZ}} + \vec{j} \lim_{S_{ZX} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{ZX}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{ZX}} + \vec{k} \lim_{S_{XY} \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{XY}} \vec{v} d\vec{l}}{S_{XY}}, \quad (9, a)$$

или короче

$$\text{rot } \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{i} \frac{\oint_{dL_{YZ}} \vec{v} d\vec{l}}{dS_{YZ}} + \vec{j} \frac{\oint_{dL_{ZX}} \vec{v} d\vec{l}}{dS_{ZX}} + \vec{k} \frac{\oint_{dL_{XY}} \vec{v} d\vec{l}}{dS_{XY}}, \quad (9, б)$$

или еще короче

$$\text{rot } \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{C}_i}{dS_{YZ}} + \frac{d\vec{C}_j}{dS_{ZX}} + \frac{d\vec{C}_k}{dS_{XY}}, \quad (9, в)$$

Вот теперь мы, наконец, получили инвариантное определение ротора, попутно показав, что он является вектором. Однако это еще не все. Во-первых, существует популярное выражение ротора через оператор Гамильтона, называемый словом «набла» — по всей видимости, из-за визуального сходства обозначения (∇) с одноименным музыкальным инструментом из род арф. Чтобы понять, как это получается, выпишем подробное выражение ротора, заменив пределы (9) их выражением через частные производные:

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (10, a)$$

Ничего не напоминает? Тогда смотрим еще раз:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right). \quad (10,6)$$

И сравниваем с (0)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (0)$$

По форме записи (10) и (0) выглядят идентично. Естественно, никакого умножения проекций в (10) на самом деле нет, поскольку левый «сомножитель» — это вообще не число. Но форма записи действительно такая, как если бы существовал вектор

$$\vec{V} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (11)$$

и мы его векторно умножили на \vec{v} . Тогда, памятуя о чисто формальном характере этой операции можно и записать:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{V} \times \vec{v}. \quad (12)$$

Последнее, что необходимо доказать, чтобы завершить основную часть темы «ротор» — это теорема Стокса. Она состоит в том, что

Поток ротора вектора через произвольную поверхность, ограниченную контуром, равен циркуляции этого вектора по охватывающему поверхность контуру:

$$\int_{S_{\text{огр}}} \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{S} = \oint_{L_{\text{охв}}} \vec{v} \, d\vec{l}. \quad (13)$$

Используя инвариантное определение ротора, доказать теорему Стокса довольно таки легко. Рассмотрим два элемента нашей поверхности $S_{\text{огр}}$, прилегающие друг к другу, p и q (рис. 5). Циркуляция вектора \vec{v} через контур p :

$$\vec{C}_p = \vec{n}_p \oint_{CADC} \vec{v} \, d\vec{l} = \operatorname{rot}_{\vec{n}_p} \vec{v} \, dS_p.$$

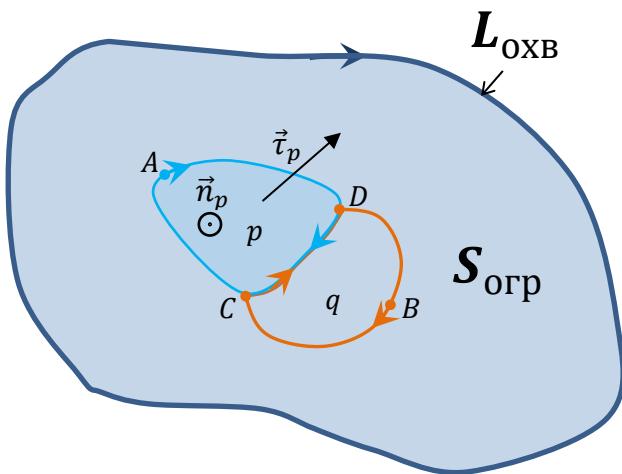


Рис. 5

Следовательно, скалярная циркуляция

$$C_p = \vec{n}_p \vec{C}_p = \oint_{CADC} \vec{v} \, d\vec{l} = \operatorname{rot}_{\vec{n}_p} \vec{v} \, d\vec{S}_p = \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{S}_p,$$

где $d\vec{S}_p = \vec{n}_p dS_p$ — векторный элемент площади контура. При этом учтено, что $\operatorname{rot}_{\vec{\tau}_p} \vec{v} \, d\vec{S}_p = 0$ (см. рис. 5.). Аналогично циркуляция \vec{v} через контур q :

$$C_q = \oint_{CDBC} \vec{v} \, d\vec{l} = \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{S}_q.$$

Тогда

$$C_p + C_q = \oint_{CADBC} \vec{v} d\vec{l} = C_{pq},$$

где C_{pq} — циркуляция вдоль контура участка, полученного объединением элементов p и q . Здесь мы также учли, что, участок CD был пройден дважды и в противоположных направлениях. С другой стороны

$$C_{pq} = \text{rot } \vec{v} d\vec{S}_p + \text{rot } \vec{v} d\vec{S}_q = \int_{S_{pq}} \text{rot } \vec{v} d\vec{S}. \quad (14)$$

Поверхностный интеграл в (14) пока состоит всего из двух слагаемых. Но действуя дальше аналогичным образом, мы сложим циркуляции \vec{v} по контурам всех элементов поверхности $S_{\text{огр}}$. В итоге слева получим циркуляцию вектора \vec{v} по контуру всей поверхности, а справа — поток его ротора через всю поверхность. Теорема Стокса доказана.