Загадочный ротор

Понятие ротора является одним из наиболее трудно усваиваемых в векторном анализе. Причина тому, на мой взгляд, в том, что авторы университетских учебников, как правило, не ищут легких путей для читателя, стараясь при этом максимально облегчить задачу себе. Они излагают материал преимущественно с формальных позиций, а при таком подходе даже понять что такое ротор весьма проблематично. Неудобства данного подхода легко проиллюстрировать на хорошо известном продвинутому школьнику понятии векторного произведения. Его также можно определить формально, через выражение в декартовых координатах:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{\imath}\left(a_y b_z-a_z b_y\right)+\vec{\jmath}\left(a_z b_x-a_x b_z\right)+\vec{k}\left(a_x b_y-a_y b_x\right). \qquad (0)$$

Но будет ли при этом сразу понятно, что представляет собой векторное произведение? Не факт, что оно вообще будет вектором, поскольку коэффициенты при ортах в правой части (0), будучи координатами векторов, зависят от выбора системы координат. Но если векторное произведение — это все-таки вектор, то он должен как-то зависеть от векторов-сомножителей. Однако в (0) эта зависимость ну никак не прослеживается. Таким образом, определять векторное произведение координатным способом, по меньшей мере, неудобно. В то же время существует простое и хорошо известное геометрическое определение векторного произведения с помощью синуса угла между векторами-сомножителями и правого винта. Оно решает все поставленные выше вопросы. Такой же геометрический путь возможен в векторном анализе, и мы пойдем этим путем.

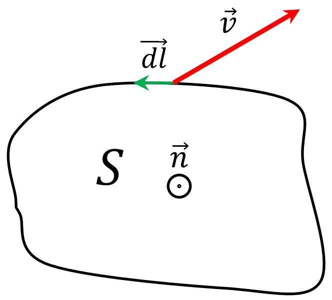

Рис. 1

Итак, **пусть из каждой точки некоторой области пространства определенным образом проведен вектор. Множество всех векторов, проведенных таким образом, обозначим одной буквой (например, $\vec{v}$) и будем говорить, что в данной области задано поле вектора $\vec{v}$.** Можно сказать, что $\vec{v}$ является функцией пространственных координат точек этой области:

$$\vec{v}=\vec{v}(x;y;z). \qquad (1)$$

Рассмотрим вектор

$$\operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{v}=\vec{n}\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L \vec{v}\vec{dl}}{S}=\vec{n}\frac{\oint_{dL}\vec{v}\vec{dl}}{dS}. \qquad (2)$$

Здесь интеграл, называемый *циркуляцией*, берется вдоль контура L, ограничивающего некоторую плоскую поверхность площади S, $\vec{n}$ — единичная правая нормаль контура (рис. 1). Предполагается, что контур стягивается к некоторой лежащей внутри него точке. $\operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{v}$ — это еще не сам ротор, но уже его составляющая, коллинеарная нормали. Можно ввести понятие *векторной циркуляции* вектора $\vec{v}$ по данному элементарному контуру:

$$\overrightarrow{dC_{\vec{n}}}=\vec{n}\oint_{dL}\vec{v}\vec{dl}, \qquad (2')$$

Тогда (2) запишется короче:

$$\operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{v}=\frac{\overrightarrow{dC_{\vec{n}}}}{dS}. \qquad (2,\mathrm{a})$$

Почему и при каких условиях $\mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{v}$ является определенным вектором? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем сначала узкий, элементарный, прямоугольный контур $(\partial x \ll \Delta y)$, ориентированный по осям X и Y декартовой системы координат (рис. 2). Тогда нормалью контура будет орт $\vec{k}$. Для проекции $\mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v}$ на ось Z имеет место следующая очевидная цепочка преобразований:

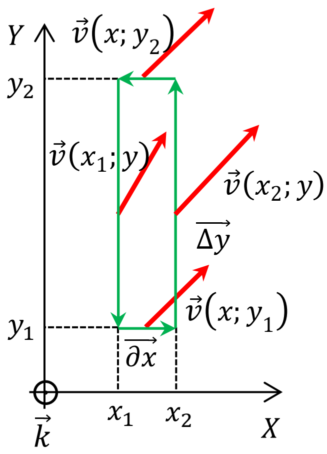

Рис. 2

$$\left(\mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v}\,(x;y)\right)_z =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v_x(x;y_1)\partial x + \int_{y_1}^{y_2} v_y(x_2;y)\partial y - v_x(x;y_2)\partial x + \int_{y_2}^{y_1} v_y(x_1;y)\partial y}{\partial x \Delta y} =$$

$$= -\frac{\partial v_x}{\partial y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v_y}{\partial x}\partial y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \rangle \int_{y_1}^{y_2} \partial y}{\Delta y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \langle \frac{\partial v_y}{\partial x} \rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (3)$$

Тогда в векторном виде

$$\mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v}\,(x;y) = \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

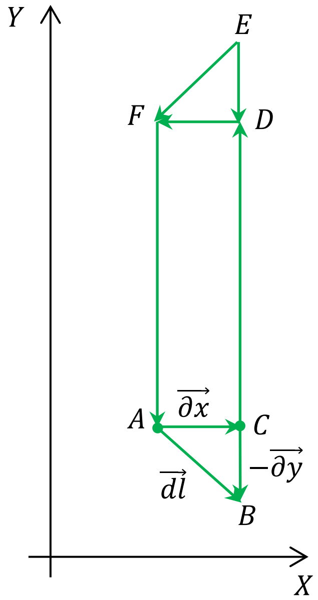

Рис. 3

Возьмем теперь элементарный контур в форме узкой трапеции (рис. 3). Для элемента, неколлинеарного оси X, имеет место соотношение:

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{\partial x} + \left(-\overrightarrow{\partial y}\right). \qquad (5)$$

Тогда при вычислении циркуляции участок BC будет пройден дважды и в противоположных направлениях, поэтому соответствующие вклады взаимно сократятся; то же произойдет с участком DE. Таким образом, трапециевидный элементарный контур сводится к прямоугольному (разница между площадями контуров в пределе исчезает).

И наконец, в произвольный плоский контур мы можем вписать трапециевидные элементы. Циркуляция по любому m – му элементу, согласно (2) и (3) равна

$$C_m = \left(\oint \vec{v}\,\overrightarrow{dl}\right)_m = \left(\langle\frac{\partial v_y}{\partial x}\rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_m S_m, \qquad (6)$$

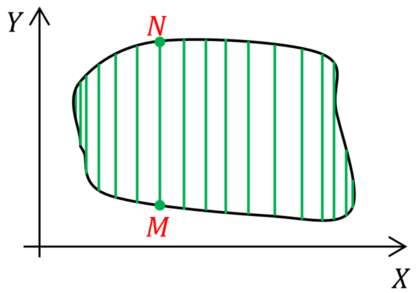

Рис. 4

где S_m — площадь m – го элемента. При сложении циркуляций вдоль вписанных элементов каждый внутренний участок (типа MN) будет пройден дважды и в противоположных направлениях, поэтому в итоге «выживут» лишь вклады, обусловленные элементами самого криволинейного контура, то есть мы получим циркуляцию вдоль всего контура. Следовательно

$$\left(\mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v}\right)_z = \lim_{S \to 0} \frac{\sum C_m S_m}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\sum\left(\left(\langle\frac{\partial v_y}{\partial x}\rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_m S_m\right)}{S} =$$

$$= \lim_{S\to 0}\frac{\langle\langle\frac{\partial v_y}{\partial x}\rangle - \frac{\partial v_x}{\partial y}\rangle \sum S_m}{S} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (7)$$

Таким образом, независимо от формы контура, предел (2) определяется соотношением (4). Стало быть, при существовании соответствующих частных производных, данный предел существует. С другой стороны, он лишь выражается через частные производные проекций вектора, но определяется самими векторами $\vec{v}$ и $\overrightarrow{dl}$ а также площадью, ограниченной контуром. Следовательно, предел (2) в действительности не зависит от системы координат. Поэтому

$$\mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v} = \vec{k}\lim_{S_{XY}\to 0}\frac{\oint_{L_{XY}}\vec{v}\overrightarrow{dl}}{S_{XY}} \qquad (8,\text{а})$$

является вектором. Аналогичным образом

$$\mathrm{rot}_{\vec{\imath}}\,\vec{v} = \vec{\imath}\lim_{S_{YZ}\to 0}\frac{\oint_{L_{YZ}}\vec{v}\overrightarrow{dl}}{S_{YZ}} \qquad (8,\text{б})$$

и

$$\mathrm{rot}_{\vec{\jmath}}\,\vec{v} = \vec{\jmath}\lim_{S_{ZX}\to 0}\frac{\oint_{L_{ZX}}\vec{v}\overrightarrow{dl}}{S_{ZX}} \qquad (8,\text{в})$$

также являются векторами. Значит, вектором будет и сумма: $\mathrm{rot}_{\vec{\imath}}\,\vec{v} + \mathrm{rot}_{\vec{\jmath}}\,\vec{v} + \mathrm{rot}_{\vec{k}}\,\vec{v}$. Вот это и есть ротор вектора $\vec{v}$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{\imath}}\lim_{S_{YZ}\to 0}\frac{\oint_{L_{YZ}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{S_{YZ}}} + \vec{\boldsymbol{\jmath}}\lim_{S_{ZX}\to 0}\frac{\oint_{L_{ZX}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{S_{ZX}}} + \vec{\boldsymbol{k}}\lim_{S_{XY}\to 0}\frac{\oint_{L_{XY}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{S_{XY}}}, \qquad (\mathbf{9},\text{а})$$

или короче

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{\imath}}\frac{\oint_{dL_{YZ}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{dS_{YZ}}} + \vec{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\oint_{dL_{ZX}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{dS_{ZX}}} + \vec{\boldsymbol{k}}\frac{\oint_{dL_{XY}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}}{\boldsymbol{dS_{XY}}}, \qquad (\mathbf{9},\text{б})$$

или еще короче

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dC_i}}}{\boldsymbol{dS_{YZ}}} + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dC_j}}}{\boldsymbol{dS_{ZX}}} + \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dC_k}}}{\boldsymbol{dS_{XY}}}, \qquad (\mathbf{9},\text{в})$$

Вот теперь мы, наконец, получили инвариантное определение ротора, попутно показав, что он является вектором. Однако это еще не все. Во-первых, существует популярное выражение ротора через оператор Гамильтона, называемый словом «набла» — по всей видимости, из-за визуального сходства обозначения (∇) с одноименным музыкальным инструментом из род арф. Чтобы понять, как это получается, выпишем подробное выражение ротора, заменив пределы (9) их выражением через частные производные:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \qquad (10,\text{а})$$

Ничего не напоминает? Тогда смотрим еще раз:

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}v_z-\frac{\partial}{\partial z}v_y\right)+\vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial z}v_x-\frac{\partial}{\partial x}v_z\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_y-\frac{\partial}{\partial y}v_x\right). \qquad (10,б)$$

И сравниваем с (0)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{\imath}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{\jmath}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right). \qquad (0)$$

По форме записи (10) и (0) выглядят идентично. Естественно, никакого умножения проекций в (10) на самом деле нет, поскольку левый «сомножитель» — это вообще не число. Но форма записи действительно такая, как если бы существовал вектор

$$\vec{\nabla}=\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (11)$$

и мы его векторно умножили на $\vec{v}$. Тогда, памятуя о чисто формальном характере этой операции можно и записать:

$$\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{v}}. \qquad (\mathbf{12})$$

Последнее, что необходимо доказать, чтобы завершить основную часть темы «ротор» — это теорема Стокса. Она состоит в том, что

Поток ротора вектора через произвольную поверхность, ограниченную контуром, равен циркуляции этого вектора по охватывающему поверхность контуру:

$$\int\limits_{S_{\text{огр}}}\mathbf{rot}\,\vec{v}\,\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}=\oint\limits_{L_{\text{охв}}}\vec{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}. \qquad (\mathbf{13})$$

Используя инвариантное определение ротора, доказать теорему Стокса довольно таки легко. Рассмотрим два элемента нашей поверхности $S_{\text{огр}}$, прилегающие друг к другу, p и q (рис. 5). Циркуляция вектора $\vec{v}$ через контур p:

$$\vec{C}_p=\vec{n}_p\oint\limits_{CADC}\vec{v}\overrightarrow{dl}=\operatorname{rot}_{\vec{n}_p}\vec{v}\,dS_p.$$

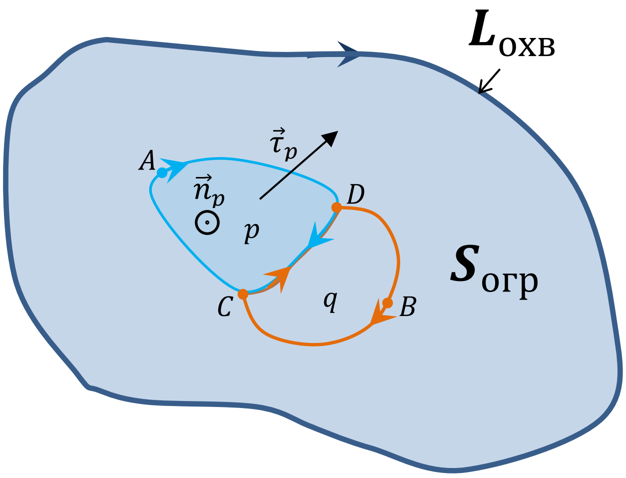

Рис. 5

Следовательно, скалярная циркуляция

$$C_p=\vec{n}_p\vec{C}_p=\oint\limits_{CADC}\vec{v}\overrightarrow{dl}=\operatorname{rot}_{\vec{n}_p}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_p=\operatorname{rot}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_p,$$

где $\overrightarrow{dS}_p=\vec{n}_p dS_p$ — векторный элемент площади контура. При этом учтено, что $\operatorname{rot}_{\vec{\tau}_p}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_p=0$ (см. рис. 5,). Аналогично циркуляция $\vec{v}$ через контур q:

$$C_q=\oint\limits_{CDBC}\vec{v}\overrightarrow{dl}=\operatorname{rot}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_q.$$

Тогда

$$C_p + C_q = \oint\limits_{CADBC} \vec{v}\overrightarrow{dl} = C_{pq},$$

где C_{pq} — циркуляция вдоль контура участка, полученного объединением элементов p и q. Здесь мы также учли, что, участок CD был пройден дважды и в противоположных направлениях. С другой стороны

$$C_{pq} = \operatorname{rot}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_p + \operatorname{rot}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}_q = \int\limits_{S_{pq}} \operatorname{rot}\vec{v}\,\overrightarrow{dS}. \tag{14}$$

Поверхностный интеграл в (14) пока состоит всего из двух слагаемых. Но действуя дальше аналогичным образом, мы сложим циркуляции $\vec{v}$ по контурам всех элементов поверхности $S_{\text{огр}}$. В итоге слева получим циркуляцию вектора $\vec{v}$ по контуру всей поверхности, а справа — поток его ротора через всю поверхность. Теорема Стокса доказана.