Вывод основного уравнения МКТ

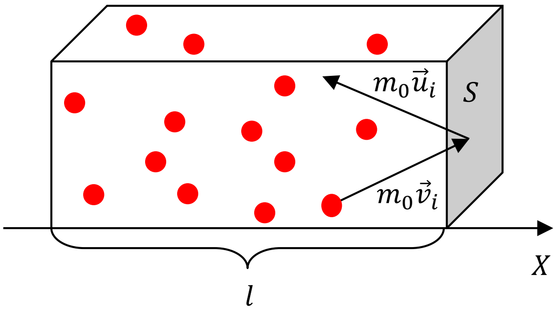

Рис. 1

Сначала рассмотрим удар одной молекулы о стенку сосуда, считая его абсолютно упругим, а стенку почти неподвижной (рис. 1). Такое предположение в известной степени оправдано. При неупругом ударе шаров, их механическая энергия переходит в энергию молекул, а в нашем случае шарами являются сами молекулы, и переходить, вроде бы, некуда. Тем не менее, молекула состоит из атомов, те, в свою очередь из ядра и электронов. Таким образом, переходами молекулярной энергии во внутримолекулярную и внутриатомную, а также энергией электромагнитного излучения мы пренебрегаем.

Запишем для одной молекулы закон сохранения импульса:

$$m_0\vec{v}_i + \vec{p}_{0i} = m_0\vec{u}_i + \vec{p}\,'_{0i}$$

Здесь $\vec{p}_{0i}$ и $\vec{p}\,'_{0i}$ — импульсы стенки, соответственно до и после удара. Конечно, скорость стенки была и останется практически равной нулю. Однако в силу значительной массы, стенка может получить импульс и без заметного изменения скорости. В проекции на ось X:

$$m_0 v_{ix} + p_{0ix} = -m_0 v_{ix} + p'_{0ix}$$

Таким образом

$$\Delta p_{0ix} = 2m_0 v_{ix}$$

Рассмотрим теперь группу из N_i молекул, обладающую близкими значениями модулей проекций скоростей $|v_{ix}|$. За время Δt они сообщат стенке импульс

$$\Delta p_{ix} = 2m_0 N_i\, v_{ix}$$

В свою очередь

$$N_i = \frac{n_i}{2} lS$$

А

$$l = v_{ix}\Delta t$$

где n_i — концентрация молекул группы, Δt — время, за которое молекула смещается на расстояние l вдоль оси X. (В силу равновероятности знаков проекций практически половина молекул группы будет обладать отрицательными проекциями, поэтому n_i делим пополам.) Таким образом

$$\frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = m_0 n_i v_{xi}^2 S = F_i$$

Это сила, давления, приложенная к стенке со стороны i –й группы молекул. Чтобы найти силу давления всего газа нужно сложить силы, действующие на стенку со стороны всех групп.

$$F = \sum F_i = m_0 S \sum n_i v_{xi}^2$$

Далее очевидно верно следующее:

$$\sum n_i v_{xi}^2 = \frac{\sum N_i v_{xi}^2}{V} = \frac{N}{V}\frac{\sum N_i v_{xi}^2}{N}$$

Здесь $\frac{N}{V}$ будет полной концентрацией молекул, а $\frac{\sum N_i v_{xi}^2}{N} = \langle v_x^2 \rangle$ — средним значением квадрата проекции скорости молекулы газа на ось X. В силу равновероятности всех направлений движения

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

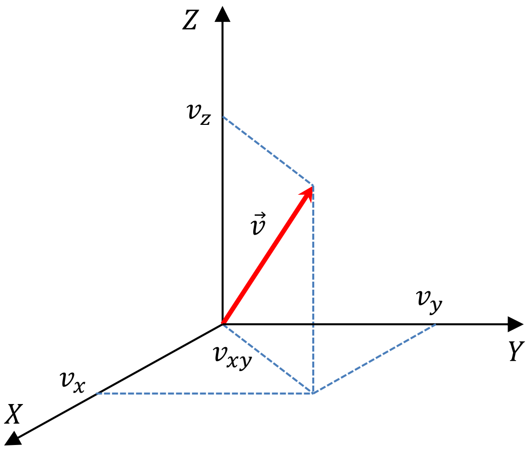

Рис. 2

А поскольку

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

(рис. 2) то и

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Стало быть

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Тогда окончательное выражение для силы давления газа на стенку имеет вид.

$$F = \frac{1}{3} m_0 n S \langle v^2 \rangle$$

Само же давление равно

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle.$$

Это и есть основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Его можно представить также в энергетической форме. Действительно, средняя кинетическая энергия поступательного движения (или центра масс) молекулы по определению равна:

$$\langle E_{\text{пост}}^{\text{кин}} \rangle = \frac{\sum \frac{m_0 v_i^2}{2}}{N} = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}.$$

Сравнивая два последних равенства, приходим к соотношению:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}}^{\text{кин}} \rangle.$$