УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим функцию L разности кинетической и потенциальной энергии системы n материальных точек, на которую действуют только потенциальные силы:

$$L = K - \Pi, \tag{1}$$

называемую *функцией Лагранжа*. Для описания движения тел этой системы в пространстве потребуется $3n$ декартовых координат. Пусть r_i — какая-либо из этих координат. Тогда

$$K = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \ddot{r}_i^2}{2},$$

причем некоторые m_i будут совпадать, поскольку являются массой одной и той же точки. Далее:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = F_i \tag{2}$$

— проекция силы, соответствующая данной координате. В свою очередь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dddot{r}_i = a_i \tag{3}$$

— проекция ускорения, соответствующая данной координате. Подставляя (2) и (3) во второй закон Ньютона, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0. \tag{4}$$

Систему соотношений (4), записанных для всех координат, называют *уравнениями Лагранжа*. Как видим в декартовых координатах они являются просто иной записью второго закона Ньютона.

Поставим теперь вопрос: какой вид примет уравнение Лагранжа при переходе к другой системе координат? Пусть q_i — какая-либо из новых *обобщенных* координат. Рассмотрим интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1; \dots; q_n; \dots; \dot{q}_1; \dots; \dot{q}_n; t)dt, \tag{5}$$

называемый *действием.* В реальности тела рассматриваемой система будут двигаться по вполне определенным траекториям, поэтому все q_i и $\dot{q}_i$ в каждый момент времени будут принимать строго определенные значения. Вообразим, однако, что в какой-то момент одна из координат, в процессе движения, изменилась на величину

$$\delta q_i = q_i'(t) - q_i(t)$$

— то есть осуществим, как говорят, *изохронную вариацию* координаты. Потребуем также, чтобы δq_i была положительной на всем интервале $(t_1;\ t_2)$ и обращалась в нуль на его концах. Тогда действие получит вариацию

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q_i';\ \dot{q}_i') - L(q_i;\ \dot{q}_i)\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \tag{6}$$

В последнем соотношении из координат мы оставили только варьируемую, а все остальные и время – опустили, поскольку они не меняются. Вариация функции Лагранжа может быть представлена в виде:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i.$$

В свою очередь

$$\delta\dot{q}_i = \frac{dq_i'}{dt} - \frac{dq_i}{dt} = \frac{d(q_i' - q_i)}{dt} = \frac{d(\delta q_i)}{dt} \tag{7}$$

Тогда

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d(\delta q_{i)} \tag{8}$$

Проинтегрируем второй интеграл в (8) по частям. Получим:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Так как мы не варьировали q_i на концах временного интервала, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Стало быть,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt. \tag{9}$$

Варьирование обобщенной координаты q_i означает также варьирование связанных с ней декартовых координат. Таких координат может оказаться не одна, тогда под интегралом (9) окажется сумма. Приравнивая вариацию δS в декартовых и обобщенных координатах, имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)\delta r_i\, dt. \tag{10}$$

Какие-то из декартовых координат в процессе варьирования могут не участвовать, и соответствующие $\delta r_i = 0$. Но, независимо от этого, все выражения в скобках правой части (10) – это второй закон Ньютона, записанный в форме (4). Поэтому вся правая часть (10) равна нулю. Стало быть

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt = 0. \tag{11}$$

А так как пределы интегрирования выбраны произвольно, а δq_i в процессе интегрирования не равно нулю, то выполнение (11) возможно только при равенстве нулю подынтегрального выражения. Таким образом, мы приходим к соотношению:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{12}$$

Это и есть уравнение Лагранжа. Как видим, в обобщенных координатах оно имеет тот же вид, что и в декартовых – такое свойство уравнений называют *ковариантностью*. Оно весьма полезно, поскольку теперь мы можем выбрать удобные координаты, найти обобщенные скорости, обобщенные силы и подставить их в уравнения Лагранжа (12), **не получая их из второго закона Ньютона.**

Утверждение (11) называют *принципом наименьшего действия*. Это исторически сложившееся и, как часто бывает, не совсем удачное название. Действительно, обращение вариации действия в нуль является не достаточным, а только необходимым условием минимума. Поэтому реальную ценность для механики представляет не принцип наименьшего действия, а сами уравнения Лагранжа, по причинам удобства, о чем было только что сказано. А также *вариационный принцип*, позволяющий существенно сэкономить усилия при получении данных уравнений, по сравнению с их прямым выводом из второго закона Ньютона. Насколько я могу судить, в современной литературе термин «вариационный принцип», вытеснил устаревшее название «принцип наименьшего действия», что, несомненно радует.