Уравнение Клейна—Фока—Гордона

Также как и уравнение Шредингера, УКФГ не выводится в общем виде, а лишь получается для частного случая свободной частицы, после чего мы говорим: «Да будет так всегда!» Приступим.
4-импульс частицы:

$$P^{\mu} = \left(\frac{E}{c}; \vec{p}\right).$$

Его интервал:

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2. \quad (1)$$

Как водится, сделаем E и p операторами над ψ-функцией волны де Бройля свободной частицы

$$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r}-Et)}, \quad (2)$$

и извлечем из нее их собственные значения. Итак:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi\frac{i}{\hbar}p_x.$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\psi\frac{p_x^2}{\hbar^2},$$

откуда

$$p_x^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Аналогично

$$p_y^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$p_z^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Далее

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\psi\frac{i}{\hbar}E,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\psi\frac{E^2}{\hbar^2},$$

откуда

$$E^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Подставляя (3), (4), (5), (6) в (1), получаем:

$$\hbar^2\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=m^2c^2\psi$$

Или в более лаконичном виде:

$$\partial_x^2\psi+\partial_y^2\psi+\partial_z^2\psi-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi. \tag{7}$$

Или в еще более лаконичном виде:

$$\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi, \tag{8}$$

где

$$\Delta=\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2 \tag{9}$$

— оператор Лапласа. Или в еще более лаконичном виде:

$$\Box\psi=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi, \tag{10}$$

где

$$\Box=\Delta-\frac{\partial_t^2}{c^2}. \tag{11}$$

— оператор Д’Аламбера. УКФГ готово.

Особо лаконично УКФГ выглядит для безмассовой частицы

$$\Box\psi=0. \tag{12}$$

Всего 3 символа, а как много сказано! Но надо уметь читать ;-)