ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДНИКА

Теорема

Заданной величины заряд может быть единственным образом равновесно распределен по данному проводнику, возможно, находящемуся в электростатическом поле.

▲

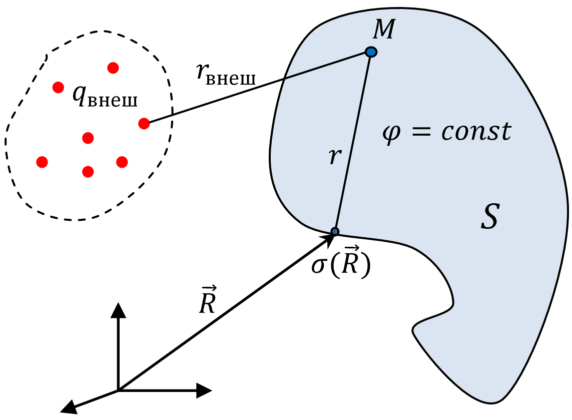

Рис. 1

Пусть Q — заряд, распределенный по проводящей поверхности площадью S, по закону $\sigma = \sigma(\vec{R})$ (рис. 1):

$$\oint_S \sigma(\vec{R}) dS = Q.$$

Пусть также проводник находится в поле внешних зарядов $q_{внеш}$. В итоге он приобретает постоянный потенциал φ.

Предположим, что заряд Q можно равновесно распределить по поверхности того же проводника, в том же внешнем поле каким-либо иным способом нежели $\sigma(\vec{R})$ Соответствующее альтернативное распределение обозначим $\sigma'(\vec{R})$, а потенциал, приобретаемый при этом проводником — φ'. С другой стороны, этот же постоянный потенциал, по принципу суперпозиции, в произвольной точке M, принадлежащей проводнику, задается соотношением:

$$\varphi'(M) = k\left(\sum \frac{q_{внеш}}{r_{внеш}} + \oint_S \frac{\sigma'(\vec{R})dS}{r}\right).$$

Тогда, если, при отсутствии внешнего поля, распределить поверхностный заряд по закону $\sigma''(\vec{R}) = \sigma(\vec{R}) - \sigma'(\vec{R})$, то проводник приобретет потенциал

$$\varphi'' = k\oint_S \frac{\sigma(\vec{R}) - \sigma'(\vec{R})}{r} dS = k\left(\left(\sum \frac{q_{внеш}}{r_{внеш}} + \oint_S \frac{\sigma(\vec{R})}{r} dS\right) - \left(\sum \frac{q_{внеш}}{r_{внеш}} + \oint_S \frac{\sigma'(\vec{R})}{r} dS\right)\right) =$$

$$= \varphi - \varphi' = const.$$

Таким образом, распределение $\sigma''(\vec{R})$, при отсутствии внешнего поля, также является возможным. Но фактически это означает, что на поверхности незаряженного проводника, в отсутствие внешнего поля, образовался индуцированный электрический заряд. Весьма странное явление — оно уже само по себе говорит о том, что $\sigma''(\vec{R})$, а, следовательно, и $\sigma'(\vec{R})$, невозможно. Но можно доказать это и более формально. Поскольку при реализации $\sigma''(\vec{R})$ поверхность проводника будет содержать как положительные, так и отрицательные заряды, силовые линии в этом случае должны начинаться и заканчиваться на поверхности проводника.

Переместим положительный пробный заряд вдоль одной из таких линий по траектории $1 \to 2 \to 3$ и через точку 4 вернемся в точку 1 (рис. 2). Работа кулоновских сил поля проводника, при этом, будет равна

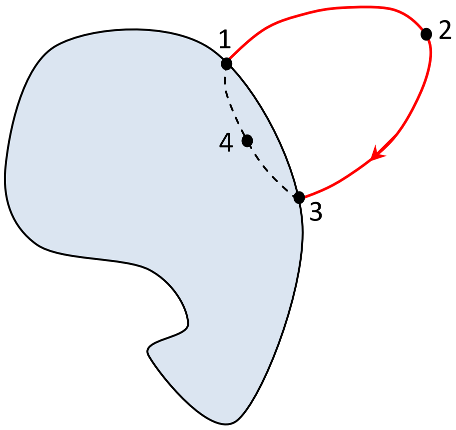

Рис. 2

$$A^{\text{кул}}_{1\to2\to3\to4\to1} = A_{1\to2\to3} + A_{3\to4\to1}.$$

Но

$$A_{3\to4\to1} = q_{\text{пр}}(\varphi'' - \varphi'') = 0.$$

В то же время, очевидно

$$A_{1\to2\to3} > 0.$$

Стало быть, и $A^{\text{кул}}_{1\to2\to3\to4\to1} > 0$, что противоречит условию консервативности электростатического поля.

Можно предположить, что силовые линии только выходят из поверхности проводника, заканчиваясь в бесконечности, и приходят из бесконечности, заканчиваясь на поверхности проводника. В этом случае, нам придется проследовать с пробным зарядом вдоль выходящей линии на бесконечность, где проводник можно рассмотреть как нулевой точечный заряд, там перейти на входящую линию и вернуться по ней на проводник. Можно показать, что работа электростатического поля на большом удалении ρ от проводника удовлетворяет неравенству

$$|A^{\text{кул}}(\rho)| \le k\frac{q_{\text{пр}}q_+}{\rho^2}l,$$

где q_+ — суммарный положительный заряд, находящийся на проводнике (на нем же есть и $q_- = -q_+$), l — максимальный размер проводника. Очевидно, что

$$\lim_{\rho\to\infty} A^{\text{кул}}(\rho) = 0.$$

Таким образом, и в этом необычном случае получаем противоречие с условием консервативности электростатического поля.

Теорему о единственности распределения заряда можно сформулировать и для нескольких проводников. В этом случае для каждого проводника будет задан свой заряд.

■

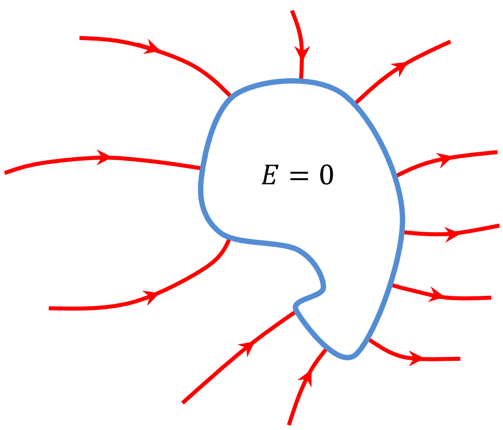

Рис. 2

Простым и наглядным примером применения теоремы о единственности распределения заряда по проводнику является принцип действия *электростатической защиты.* Суть его заключается в следующем. Возьмем проводник, плотно обтянем его проводящей оболочкой и поместим в электростатическое поле. Внутри проводника напряженность будет равна нулю. Если мы теперь (не важно, как это осуществить технически) уберем проводник, не трогая оболочку, то весь индуцированный заряд останется, ведь он находится на оболочке. Стало быть, возможно такое распределение индуцированного заряда по поверхности замкнутой проводящей оболочки, при котором напряженность электростатического поля внутри нее окажется равной нулю. Тогда, в силу доказанной нами теоремы, только так всегда и будет. А это значит, что, если электронные приборы окружить проводящей оболочкой, они не будут подвержены воздействию внешних электростатических полей, отсюда и название — электростатическая защита. Надо, однако, помнить, что электростатическая индукция не происходит моментально. Поэтому даже такие приборы могут оказаться беззащитными перед полями высокой напряженности или частоты.