КВАЗИУПРУГАЯ СИЛА. ПРИБАВЛЕНИЕ К КВАЗИУПРУГОЙ СИЛЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ.

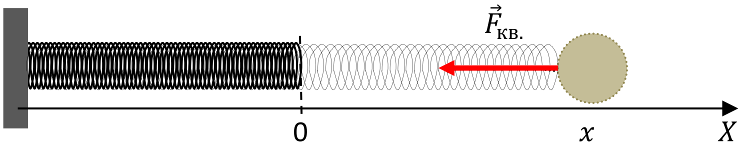
Определение. **Квазиупругой называется сила, пропорциональная смещению тела и направленная противоположно этому смещению.**

Другими словами, если смещение тела задано некоторой координатой x, то действующая на него квазиупругая сила, в проекции на ось OX, будет определяться соотношением:

$$F_x = -kx. \tag{1}$$

Коэффициент k называется *коэффициентом квазиупругой силы.* Под действием квазиупругой силы, при наличии ненулевых начальных условий (скорости или смещения) материальная точка всегда будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$



Действительно, по второму закону Ньютона, в этом случае имеем:

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{3}$$

Стало быть

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x, \tag{4}$$

— а это уравнение, как известно, описывает гармонические колебания. Положение равновесия, при этом, будет находиться в начале координат, поскольку, как следует из (1), значение квазиупругой силы в этой точке равно нулю. Природа квазиупругой силы может быть весьма разнообразной, но ее зависимость от смещения будет всегда одной и той же. В частности квазиупругой является и упругая сила, подчиняющаяся закону Гука, откуда и происходит название «квазиупругая сила».

Пусть теперь на тело действует квазиупругая сила и еще некоторая постоянная сила P. Тогда динамическое уравнение движения (второй закон Ньютона) примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx + P. \tag{5}$$

Как будет двигаться при этом тело? Для ответа на данный вопрос преобразуем (5) к виду:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{P}{k}\right). \tag{6}$$

Далее сделаем замену:

$$y = x - \frac{P}{k}. \tag{7}$$

Поскольку новая и старая переменные отличаются друг от друга лишь константой $-\frac{P}{k}$, их производные будут совпадать. Тогда новая переменная удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y, \tag{8}$$

то есть уравнению гармонических колебаний. По сути, замена переменной означает перенос начала координат в положение равновесия. Действительно, тело находится в равновесии при $x = \frac{P}{k}$, но в этом случае $y = 0$. Таким образом, добавив к квазиупругой силе постоянную силу, мы просто сместили положение равновесия тела, а сделав замену (7), подтянули к новому положению равновесия и начало координат. Из (8) также, видно, что после замены переменной правая часть динамического уравнения движения точки снова стала квазиупругой силой:

$$\tilde{F}_y = -ky \tag{9}$$

с тем же коэффициентом. Таким образом, в качестве ответа на поставленный вопрос, нами доказана

Теорема. Если к квазиупругой силе прибавить постоянную силу, тело будет совершать гармонические колебания с прежней частотой, изменится лишь его положение равновесия.

Замечание. Того же результата (8) можно достичь, если сразу выбрать начало координат в положении равновесия. В этом случае положение равновесия уже не будет точкой нуля старой квазиупругой силы. Пусть y_0 — координата точки, где она теперь равна нулю. Тогда

$$F_y = -k(y - y_0). \tag{10}$$

Динамическое уравнение движения в этом случае примет вид

$$m\ddot{y} = -k(y - y_0) + P, \tag{11}$$

А для положения равновесия

$$0 = ky_0 + P. \tag{12}$$

После подстановки (12) в (11) мы снова приходим к (8). Физически (11) можно интерпретировать как разложение квазиупругой силы на две, с целью выделения постоянной составляющей

$$F_0 = ky_0. \tag{13}$$

Составляющая F_0 компенсирует постоянную силу P. Вторая — переменная составляющая старой квазиупругой силы образует новую квазиупругую силу $\tilde{F}_y$. Способ изначального выбора начала координат в положении равновесия, как правило, считается более физическим, нежели простая замена. Однако если положение точки равновесия не сразу очевидно или просто не охота возиться с его определением, можно спокойно выбирать «обычное» начало координат и затем делать замену. Особенно не очевидны *состояния* равновесия для сложных механических колебательных систем, а также в колебательном контуре с дополнительно включенными элементами (простейший случай — LC-контур + постоянная ЭДС). А ведь для таких контуров наш метод вполне применим, он вообще применим для гармонических колебаний любой природы. Математически задачу тогда можно сформулировать так:

Уравнение вида

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \Psi, \tag{14}$$

где $\Psi = const$, сводится к уравнению

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \tag{15}$$

заменой:

$$y = x - \frac{\Psi}{\omega^2}. \tag{16}$$