Скалярное произведение векторов

Инвариантное определение

Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} \overset{\text{def}}{=} ab\cos\varphi \qquad (1)$$

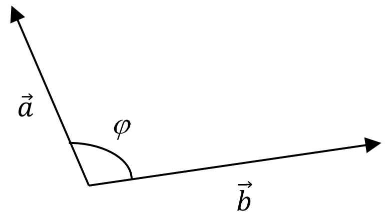

Рис. 1

Здесь стоит обратить внимание на то, как определяется угол между векторами (рис. 1). Данное определение называется инвариантным потому, что ни его вид, ни значение не зависит от выбранной системы координат (подумайте, почему?) оно вообще не требует введения системы координат.

Координатное определение

Скалярным произведением векторов называется сумма произведений их соответствующих проекций:

$$\vec{a}\vec{b} \overset{\text{def}}{=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2)$$

Если векторы расположены в плоскости XY, то последнее слагаемое в (2) можно опустить – это случай планиметрии. Ну а поскольку любая пара векторов, проведенных из одной точки, расположена в одной плоскости то систему координат, для нее всегда можно выбрать так, чтобы в (2) осталась лишь пара произведений. Однако если мы рассматриваем более двух векторов и для разных пар из них определяем скалярные произведения, то свести все их к паре произведений проекций, вообще говоря, не удастся.

Соотношения (1) и (2) казалось бы, не имеют ничего общего, тем не менее, сформулированные определения эквивалентны. Доказать данное утверждение можно либо перейдя от (1) к (2) либо наоборот. Второй путь можно разбить на ряд простых шагов, в то время как для первого это сделать проблематичней. Поэтому мы пойдем по второму пути. Для начала сформулируем следующие свойства скалярного произведения в координатной форме.

1°) $\vec{a}^2 = a^2$ (скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины)
2°) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон скалярного произведения)
3°) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон скалярного произведения)
4°) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$ (формула сокращенного умножения)
5°) $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = a^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + b^2$ (формула сокращенного умножения)

Сформулированные свойства хорошо известны для действительных чисел, поэтому их истинность кажется очевидной. Однако векторы – это не числа. Поэтому все свойства векторов надо доказывать. Доказательства несложны. В качестве примера докажем свойства 1° и 2°.

Доказательство свойства 1°

∇

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2 = a^2$$

∇

Доказательство свойства 2°

∇

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = b_x a_x + b_y a_y = \vec{b}\vec{a}$$

∇

Свойство 3° предлагаем доказать самостоятельно. Свойства 4° и 5° доказываются в полной аналогии с соответствующими свойствами действительных чисел, их тоже предлагаем доказать самостоятельно. Заметим также, что, хотя векторы — это не числа, любой вектор представляется тройкой чисел, его проекций, поэтому формальное сходство свойств векторов и действительных чисел, конечно, не является случайным.

Перейдем к доказательству основной теоремы

Теорема.

Инвариантное и координатное определения скалярного произведения эквивалентны:

$$ab\cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1)$$

∇

Выразим $\vec{a}\vec{b}$ из свойства 5°:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - a^2 - b^2\right).$$

Правая часть последнего равенства содержит только квадраты длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, она не зависит от выбора системы координат. Но тогда от него не зависит и левая часть, то есть само скалярное произведение в координатной форме. А это значит, что мы можем выбрать любую удобную нам систему координат и определить в ней скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$. Такой выбор представлен на рис 2. В изображенной там системе координат

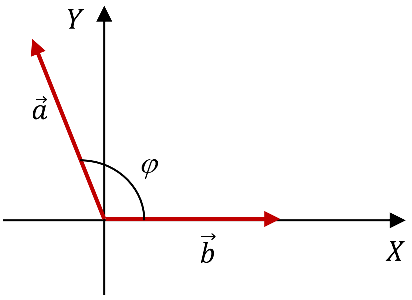

Рис. 2

$$a_x = a\cos\varphi, \qquad b_x = b, \qquad b_y = b_z = 0$$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x = ab\cos\varphi$$

∇