

Проекции вектора и их свойства

Назовем вектор коллинеарным данной оси, если он сонаправлен, либо противоположен этой оси.

Аналогичным образом определим коллинеарность векторов друг другу.

Важнейшим понятием механики и вообще физики является проекция вектора на координатную ось.

Проекцией вектора на ось декартовой системы координат называется длина его составляющей, коллинеарной этой оси, взятая в соответствии с правилом знаков.

Правило знаков:

проекция положительна, если составляющая сонаправлена оси;
 проекция отрицательна, если составляющая противоположна оси;
 проекция равна нулю, если составляющая равна нулю.

Проекция вектора \vec{a} на ось X обозначается как a_x . Используя это обозначение, можно записать определение проекции в виде лаконичной формулы:

$$a_x = \begin{cases} |\vec{a}_x| & \Leftarrow \vec{a}_x \Rightarrow X, \\ -|\vec{a}_x| & \Leftarrow \vec{a}_x \Leftarrow X, \\ 0 & \Leftarrow \vec{a}_x = 0. \end{cases} \quad (0)$$

Основные свойства проекций.

1. Равные векторы, имеют равные соответствующие проекции. И наоборот, если соответствующие проекции векторов равны, то и сами векторы равны:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y. \end{cases} \quad (1)$$

Это свойство, думается, очевидно. Из него, в частности, следует, что, если мы возьмем вектор и перенесем его в другую область пространства, не меняя направления и длины (осуществим параллельный перенос), то это никак не повлияет на проекции вектора.

2. Проекция вектора на любую координатную ось равна разности соответствующих координат его конца и начала:

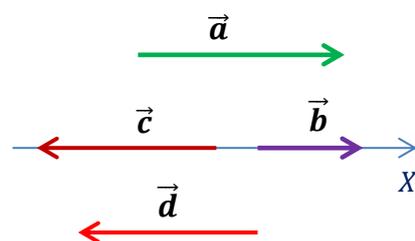


Рис. 1. Векторы, коллинеарные оси X.

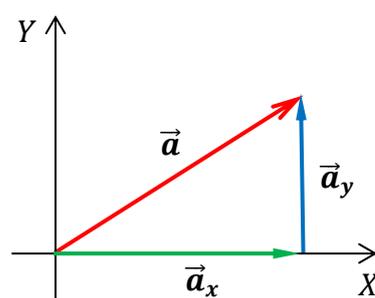


Рис. 2. Разложение вектора на составляющие, коллинеарные осям (каждая одной).

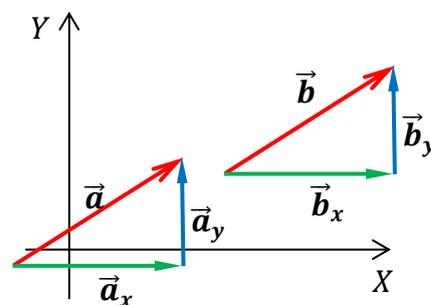


Рис. 3. Иллюстрация свойства 1.

$$a_x = x_2 - x_1. \quad (2)$$

Доказательство.

1. Вектор направлен под острым углом к оси X .

В этом случае $a_x = |\vec{a}_x| = x_2 - x_1$.

2. Вектор направлен под тупым углом к оси X .

В этом случае $|\vec{a}_x| = x_1 - x_2$. Но $a_x = -|\vec{a}_x| = x_2 - x_1$.

3. Вектор перпендикулярен оси X .

В этом случае $x_1 = x_2$. Но $a_x = 0 = x_2 - x_1$.

Удобство свойства 2. состоит в том, что (2) выполняется не зависимо от того как направлен вектор — по или против оси. Этим мы и воспользуемся.

3. **Проекция суммы векторов на определенную ось равна сумме проекций этих векторов на эту ось:**

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x + b_x, \\ c_y = a_y + b_y. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Поскольку параллельный перенос не меняет проекций векторов, то разместим их, в соответствии с правилом треугольника (рис. 5, а). Если проекции всех векторов на ось X положительны, то для них свойство 3. очевидно. Но если хотя бы одна из проекций отрицательна, то увидеть выполнение 3. будет уже не столь легко, хотя и возможно. Следуя таким наглядно-геометрическим путем, нам придется рассмотреть все возможные случаи. К счастью есть более короткий, хотя и более формальный путь. Как бы ни были расположены векторы, их концы имеют какие-то координаты (рис. 5, б). Согласно свойству 2

$$a_x = x_2 - x_1,$$

$$b_x = x_3 - x_2.$$

Тогда $a_x + b_x = x_3 - x_1 = c_x$, что и требовалось доказать. у-проекции рассматриваются аналогично.

Мы доказали (3) в одну сторону (\Rightarrow , то есть справа налево). Но, заметим, что в (3) поставлен знак \Leftrightarrow , а не \Rightarrow . Это значит, что из системы скалярных равенств правой части (3) следует векторное равенство в его левой части. Это легко доказывается методом от противного. Действительно пусть

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x, \\ c_y = a_y + b_y; \end{cases}$$

но при этом

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d},$$

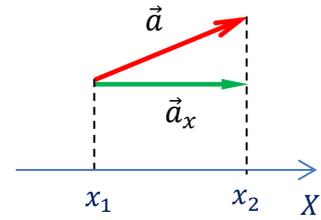


Рис. 4, а. Проекция вектора, направленного под острым углом к оси X .

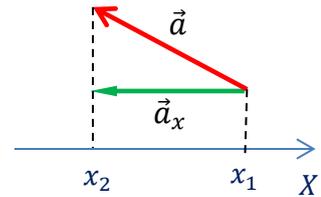


Рис. 4, б. Проекция вектора, направленного под тупым углом к оси X .

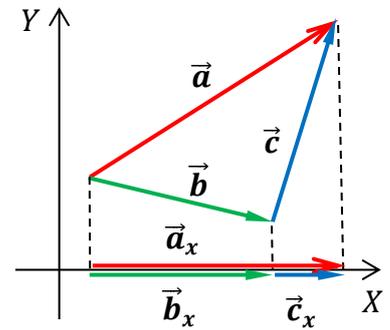


Рис. 5, а. Проекция суммы — частный случай.

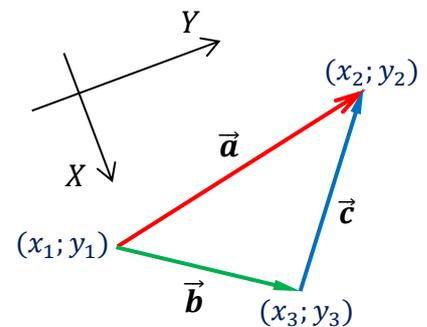


Рис. 5, б. Проекция суммы — к доказательству общего случая.

где \vec{d} — некоторый ненулевой вектор. Тогда, аналогично тому, как мы это проделали выше, доказываем, что

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x + d_x, \\ c_y = a_y + b_y + d_y; \end{cases}$$

причем хотя бы одна из проекций вектора \vec{d} должна быть отличной от нуля. Полученное противоречие доказывает (3) справа налево. Свойство (3) теперь полностью доказано.

Очевидно (3) можно распространить на произвольное число слагаемых.

4. Проекция разности двух векторов, коллинеарных оси, равна разности соответствующих проекций уменьшаемого и отнимаемого:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x, \\ c_y = a_y - b_y. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство.

Можно действовать аналогично (3). Но поскольку (3) уже доказано, это делает возможным еще одно, весьма красивое доказательство (4), представляющее собой цепочку эквивалентных утверждений:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} + \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_x = c_x + b_x \\ a_y = c_y + b_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x, \\ c_y = a_y - b_y. \end{cases}$$

(Или можно действовать так же как при доказательстве свойства 3.)

5. При умножении, или делении, вектора на число, его проекция множится (делится) на это же число:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b_x = \lambda a_x, \\ b_y = \lambda a_y. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство.

Если $\vec{a}_x \ni X$ а $\lambda > 0$, то $\vec{b}_x \ni X \Rightarrow b_x = |\vec{b}_x| = |\lambda| |\vec{a}_x| = \lambda a_x$ (рис. 6, а, использовано подобие треугольников, λ — коэффициент подобия).

Если $\vec{a} \ni X$ а $\lambda < 0$ то $\vec{b}_x \ni X \Rightarrow b_x = -|\vec{b}_x| = -|\lambda| |\vec{a}_x| = \lambda a_x$, так как, при $\lambda < 0$, $|\lambda| = -\lambda$ (рис. 6, б).

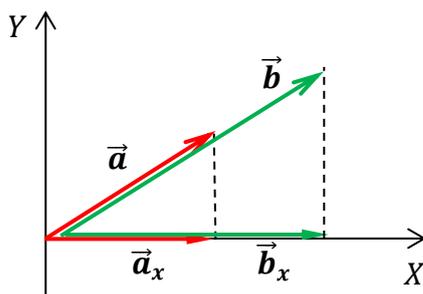


Рис. 6, а. Проекция умножения вектора на число: $\vec{a}_x \ni X$, $\lambda > 0$.

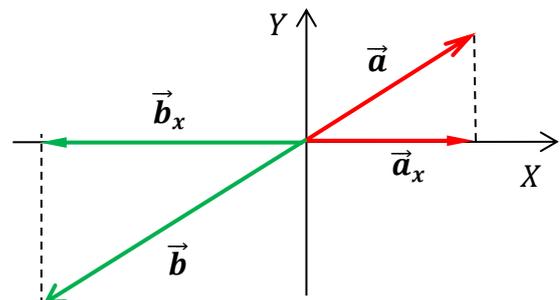


Рис. 6, б. Проекция умножения вектора на число: $\vec{a}_x \ni X$, $\lambda < 0$.

Остальные случаи и деление на число рассматриваются аналогично. Предлагаем сделать это самостоятельно.