

Парадокс субмарины

Согласно общепринятому изложению, суть парадокса заключается в следующем. Есть субмарина, средняя плотность которой, в покое, равна плотности неподвижной воды. Субмарина разгоняется до околосветовой скорости. С точки зрения береговой охраны, она при этом сжимается, следовательно, действующая на нее сила Архимеда уменьшится, и лодка пойдет ко дну. С другой стороны, по мнению команды субмарины, сожмется не лодка, а окружающие ее слои воды. Поэтому Архимедова сила, наоборот, должна возрасти, и лодка всплывет.

По поводу данного парадокса существует довольно распространенное, даже среди физиков, предубеждение о том, что, поскольку здесь задействована гравитация, он разрешим лишь в рамках общей теории относительности. Другую крайность представляет [вариант решения, изложенный в Википедии](#), здесь упоминание о роли силы тяжести вовсе отсутствует. ☺ Между тем гравитация вполне может быть рассмотрена средствами релятивистской динамики как обычная сила, единственной ее особенностью является лишь пропорциональность инертной массе. В рамках такого «срединного» подхода предложим наш вариант решения парадокса.

Для решения парадокса нам понадобится релятивистский закон сложения ускорений. Не содержа ничего принципиально нового этот закон (как и его вывод) весьма громоздок в чисто техническом плане. Однако в интересующем нас частном случае получить формулу относительно легко. Пусть в некоторый момент времени скорость материальной точки в СО K' равна нулю, а ее относительное ускорение перпендикулярно оси X' (рис. 1). Тогда, с учетом того, что $\vec{v} \perp X$, в K y -проекция ускорения точки равна

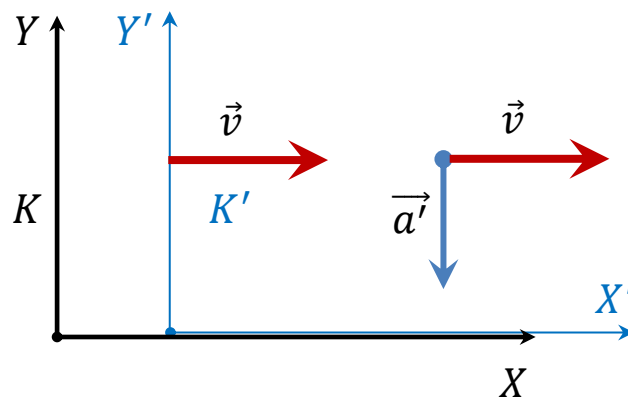


Рис. 1. Релятивистский закон сложения ускорений в частном случае.

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_{2y}}{dt}. \quad (1)$$

где v_{2y} — y -проекция скорости, приобретенной точкой за время dt . В K' частицу можно считать нерелятивистской, поэтому время ее движения будет собственным, следовательно

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Далее, в силу релятивистского закона сложения скоростей

$$v_{2y} = \frac{v'_{2y} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_{x'}} = v'_{2y} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3)$$

поскольку $v'_{x'} = 0$. Подставляя (2) и (3) в (1), получим у-проекцию ускорения в K :

$$a_y = a'_{y'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (4)$$

Выясним также, происходит ли что-нибудь с x -проекцией ускорения. Для этого найдем приращение x -проекции скорости. С учетом закона сложения скоростей и того что $v'_{2x'} = v'_{x'} = 0$, имеем:

$$dv_x = v_{2x} - v_{1x} = \frac{0 + v}{1 + \frac{v \cdot 0}{c^2}} - \frac{0 + v}{1 + \frac{v \cdot 0}{c^2}} = 0.$$

Таким образом, x -проекция ускорения не возникает в системе K .

Рассмотрим теперь динамику субмарины в обеих системах отсчета

С-ИСО «Submarine».

Речь идет не о СО, связанной непосредственно с субмариной, поскольку мы не знаем, останется ли она в равновесии, а о так называемой сопутствующей ИСО, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна скорости субмарины. Сила тяжести субмарины здесь:

$$F'_T = m_c g'_c, \quad (5)$$

где m_c — масса покоя субмарины, g'_c — ускорение ее свободного падения в С-ИСО. Сила Архимеда, как и в механике Ньютона, должна быть такой, чтобы обеспечивать равновесие воды в воде. Поэтому она по-прежнему равна весу вытесненной лодкой воды:

$$F'_A = \rho'_{\text{воды}} V'_c g'_c. \quad (6)$$

Для определения плотности движущейся воды ρ'_B надо учесть не только уменьшение ее объема, но и увеличением заключенной в нем массы

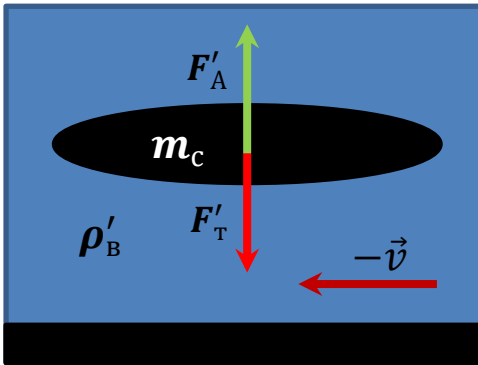


Рис. 2. С-ИСО «Submarine».

$$\rho'_B = \frac{m_{\text{рел в}}}{V'_B} = \frac{\frac{m_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{V_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho_B}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7)$$

где ρ_B — плотность воды в покое.

Далее, согласно (4),

$$g'_c = g \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (8)$$

где g — ускорение свободного падения в механике Ньютона. Таким образом,

$$F'_A = \rho_B V'_C g. \quad (9)$$

Это в точности совпадает с силой тяжести, действующей на покоящуюся лодку. Поэтому, казалось бы, субмарина должна остаться в равновесии. Но, сделав такой вывод, мы не учли, что ускорение свободного падения субмарины в S-ИСО пропорционально релятивистской массе Земли, которая больше массы покоя планеты:

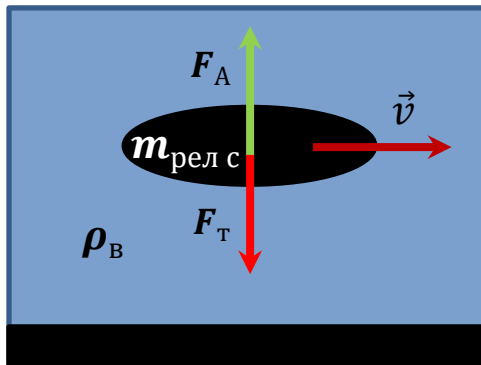
$$g'_c = G \frac{M / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{R^2} > g. \quad (9)$$

На самом деле g'_c даже больше указанной величины, поскольку Земля сплющивается в направлении движения относительно субмарины. Таким образом $F'_T > F'_A$ — **субмарина тонет**.

ИСО «Земля».

Сила тяжести субмарины:

$$F_T = m_{\text{рел } c} g_c = \frac{m_c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} g'_c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = F'_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10)$$



Сила Архимеда:

$$F_A = \rho_B V'_C \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} g = F'_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$\frac{F_T}{F_A} = \frac{F'_T}{F'_A}$$

Рис. 3. ИСО «Земля».

— и снова **субмарина тонет!**