Основы релятивистской динамики

1. Базовые положения.

Визитная карточка и смысловое ядро специальной теории относительности содержится в парадоксах релятивистской кинематики. Поэтому от релятивистской динамики, казалось бы, не приходится ждать чего-то принципиально нового и удивительного. Что же, очень скоро мы узнаем, так ли это.

По содержанию тематических разделов, релятивистская динамика, вообще говоря, не соответствует динамике Ньютона. По своему строению, ближе к динамике Гамильтона, чем к динамике Ньютона. Мы и начнем построение спецрелятивистской динамики с определения выражения для релятивистского импульса и энергии, не забывая также о массе и силе. Однако на данный момент нами известно об этих понятиях только то, что мы знаем из динамики Ньютона то есть, потребовав, чтобы они были определены однозначно, мы можем утверждать следующее.

1. **Импульс $\vec{p}$ материальной точки массы m сонаправлен[1] ее скорости $\vec{v}$ и, в приближении малых скоростей переходит в ньютоновский импульс:**

$$v \ll c \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}. \qquad (1)$$

2. **Кинетическая энергия K материальной точки массы m является функцией квадрата ее скорости v и, в приближении малых скоростей переходит в ньютоновскую энергию:**

$$v \ll c \Rightarrow K = \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Далее мы можем рискнуть и потребовать выполнения ньютоноподобных соотношений для силы, энергии и импульса.

3. **Импульс замкнутой системы сохраняется:**

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const \Leftrightarrow \forall \vec{F}_{\text{внеш}} = 0. \qquad (3)$$

4. **Сила, приложенная к материальной точке, равна скорости изменения ее импульса (основное уравнение релятивистской динамики):**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (4)$$

5. **Элементарная работа силы, приложенной к материальной точке, равна соответствующему приращению ее кинетической энергии:**

$$\vec{F}d\vec{r} = dK. \qquad (5)$$

---

[1] Поскольку единственным выделенным направлением в пространстве является направление движения частицы.

Сформулированные положения являются аксиоматическими определениями введенных в них понятий и должны приводить к экспериментально проверяемым следствиям. Из них необходимо получить также конкретный вид соотношений определяющих эти понятия.

2. Импульс.

За основу определения вида выражения релятивистского импульса нами взят вывод из книги Э. Тейлора и Дж. Уиллера «Физика пространства—времени».

Рассмотрим в некоторой ИСО S (комнате) релятивистскую частицу A, вылетающую из угла M_1 со скоростью $\vec{v}$, и медленную частицу B, той же массы, вылетающую со скоростью $\vec{u}$ из точки N, находящейся посередине комнаты. Между частицами происходит упругое столкновение

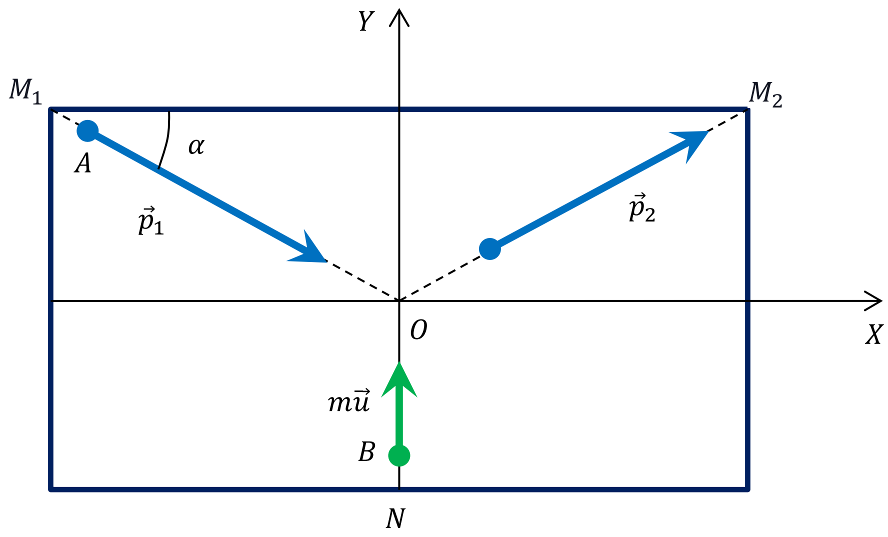

Рис. 1. Соударение частиц A и B в ИСО S.

в центре комнаты — точке O (рис. 1), причем линия удара направлена вдоль оси Y. Систему S возможно подобрать так, что после удара скорость частицы B изменится на противоположную.

Действительно допустим, первоначально, в ИСО S_0 частицу B запустили с некоторой скоростью $\vec{u}_{01}$, а после удара она отлетела со скоростью $\vec{u}_{02}$. Тогда система S должна двигаться относительно S_0 со скоростью

$$\vec{U} = \frac{\vec{u}_{01} + \vec{u}_{02}}{2}.$$

В этом случае скорость B в S до столкновения составит

$$\vec{u}_{01} - \frac{\vec{u}_{01} + \vec{u}_{02}}{2} = \frac{\vec{u}_{01} - \vec{u}_{02}}{2} = \vec{u},$$

а после столкновения —

$$\vec{u}_{02} - \frac{\vec{u}_{01} + \vec{u}_{02}}{2} = \frac{\vec{u}_{02} - \vec{u}_{01}}{2} = -\vec{u},$$

что и требуется.

Рассмотрим теперь ИСО S', движущуюся вдоль оси X со скоростью v_x. Допустим, в S', быстрая частица до столкновения, движется против оси Y' со скоростью u. Тогда в S y-проекция скорости быстрой частицы определяется релятивистским законом сложения скоростей:

$$v_y = \frac{-u\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x}{c^2}\cdot 0} = -u\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}. \tag{6}$$

С другой стороны

$$v_y = -v_x \operatorname{tg}\alpha. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем:

$$v_x = \frac{u}{\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{u^2}{c^2}}. \tag{8}$$

Последнее соотношение говорит о том, что условия эксперимента, при которых скорость частицы A в S' равна скорости частицы B в S, возможны (так как из (8) находится угол α). А если условия реализованы, то при переходе в S', частицы просто меняются ролями (рис. 2). Действительно, по релятивистскому закону сложения скоростей

$$u'_{x'} = \frac{0 - v_x}{1-\frac{v_x}{c^2}\cdot 0} = -v_x,$$

$$u'_{y'} = \frac{u\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x}{c^2}\cdot 0} = -v_y$$

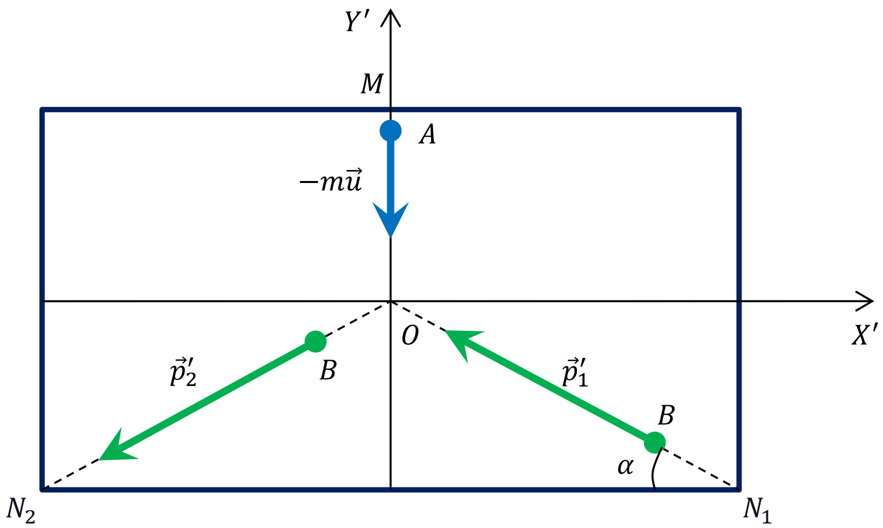

Рис. 2. Соударение частиц A и B в ИСО S'.

Но в таком случае в S', в результате удара, на противоположную изменится скорость частицы A. Тогда, по закону сложения скоростей, в результате удара, в S изменится на противоположную y-проекция скорости A. Действительно, (см. (6)) она будет равна

$$v_{\text{кон}_y} = \frac{u\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x}{c^2}\cdot 0} = u\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}} = -v_y. \tag{6'}$$

Следовательно, в силу упругости удара, x-проекция частицы A измениться не должна (иначе изменилась бы кинетическая энергия системы). Таким образом, после удара A будет двигаться с прежней по модулю скоростью и под прежним углом к оси X, в результате она долетит до точки M_2 (рис. 1).

Запишем теперь закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_1 + m\vec{u} = \vec{p}_2 - m\vec{u}.$$

Отсюда

$$\Delta\vec{p} = 2m\vec{u}.$$

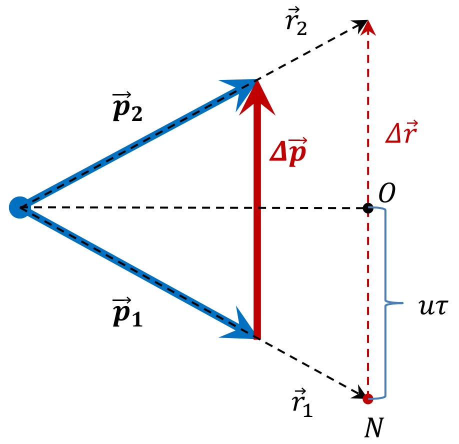

Рис. 3. Связь между импульсами частицы A и ее перемещениями.

Далее используем подобие треугольников импульсов и перемещений частицы A (обратите внимание, что $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — это последовательные перемещения частицы A, а $\Delta\vec{r}$ — их разность):

$$\frac{|\Delta\vec{p}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{p}{r}.$$

Отсюда

$$p = \frac{|\Delta\vec{p}|}{|\Delta\vec{r}|}r = \frac{2mu}{2u\tau}vt,$$

где t и τ — времена полета частиц A и B соответственно. В нерелятивистском случае они совпадали бы. В нашей же задаче мы можем выразить t через τ_0 собственное время ее движения в S':

$$t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}$$

Но, поскольку в S' скорость частицы A равна u, $\tau_0 = \tau$. Таким образом,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}.$$

Многие наши равенства, включая последнее, являются приближенными, поскольку мы не учитывали релятивистские эффекты для медленной частицы. Очевидно, приближение будет тем точнее, чем меньше ее скорость u. Но

$$\lim_{u\to 0} v_x = v.$$

Поэтому, точное значение импульса релятивистской частицы должно определяться соотношением:

$$\boldsymbol{\vec{p}} = \frac{\boldsymbol{m\vec{v}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \qquad (\boldsymbol{9})$$

Это и есть искомое выражение релятивистского импульса. Величина

$$m_{\text{р}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

называется *релятивистской массой* системы. Где-то в конце прошлого века это понятие попало в опалу, на том основании, что масса частицы подобно заряду, не должна зависеть от ее скорости. Подобные претензии на наш взгляд совершенно абсурдны, тем более что именно релятивистская масса тела ответствует за его инертные и гравитационные свойства. Тем не менее, следует учитывать принятую на данный момент терминологию, поэтому под массой по умолчанию, мы будем понимать массу тела, измеренную в системе отсчета, где оно находится в состоянии покоя (раньше она так и называлась — *масса покоя*). С учетом (10) соотношение для релятивистского импульса частицы может быть записано в ньютоноподобном виде:

$$\vec{p} = m_{\text{р}}\vec{v}. \qquad (11)$$

В завершение этого пункта хотелось бы сделать одно принципиальное замечание. Возьмем две частицы, которые взаимодействуют сильно кратковременно и на расстоянии. Пусть в некоторой СО для них выполняется третий закон Ньютона. Тогда, в силу относительности одновременности, существует и другая СО, где силы будут возникать просто по очереди, и никакого третьего закона Ньютона, равно как и закона сохранения импульса частиц мы не получим. Данная ситуация не является чисто гипотетической. Ясно, что по сути то же самое будет иметь место и для системы двух электрических зарядов. Однако ясно также и то, что импульс такой системы должен сохраняться. Но что компенсирует несохранение импульса самих зарядов? К этому вопросу мы еще вернемся. А пока ограничим применение закона сохранения импульса только мгновенными контактными взаимодействиями, то есть столкновениями.

3. 4-векторы. Релятивистская энергия. Инварианты СТО.

Преобразованиям Лоренца можно придать симметричный вид, если ввести новую единицу времени. По определению новое время получается умножением времени в СИ на скорость света в СИ:

$$\boldsymbol{T \stackrel{\text{def}}{=} ct}. \qquad (\boldsymbol{12})$$

Если использовать новую единицу времени то, как не трудно видеть, преобразования Лоренца для координаты x и времени примут вид:

$$x' = \frac{x - \beta T}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (13, \text{a})$$

$$T' = \frac{T - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{13,б}$$

где

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{13,в}$$

— новая скорость (кстати, безразмерная), называемая *быстротой*. Как видим, пространственное и временнóе преобразование выглядят теперь совершенно однотипно. На этом можно построить красивую геометрическую интерпретацию теории относительности, где четвертой (или нулевой) координатой выступает время. Получающееся таким образом четырехмерное пространство—время называется *миром Минковского* или просто *Миром*. Но дальнейший уклон в геометрию уведет нас от основного повествования. Новая (симметричная) форма преобразований Лоренца нужна нам здесь лишь с единственной целью — введения понятия 4-вектора.

4-вектором (четырехвектором) называется величина $\vec{\vec{a}}$, состоящая их трех пространственных и одной временнóй компонент, a_T, a_x, a_y, a_z которые при переходе в систему отсчета, движущуюся равномерно вдоль оси X, преобразуются по закону, аналогичному преобразованию Лоренца:

$$\boldsymbol{a'_{x'} = \frac{a_x - \beta a_T}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \tag{14,а}$$

$$\boldsymbol{a'_{y'} = a_y}, \tag{14,б}$$

$$\boldsymbol{a'_{z'} = a_z}, \tag{14,в}$$

$$\boldsymbol{a'_{T'} = \frac{a_T - \beta a_x}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \tag{14,г}$$

Самым простым примером 4-вектора, является набор пространственно временных координат материальной точки (T; x; y; z), который вполне можно назвать *мировым радиус-вектором* частицы. Четырехвекторы обладают следующими очевидными свойствами:

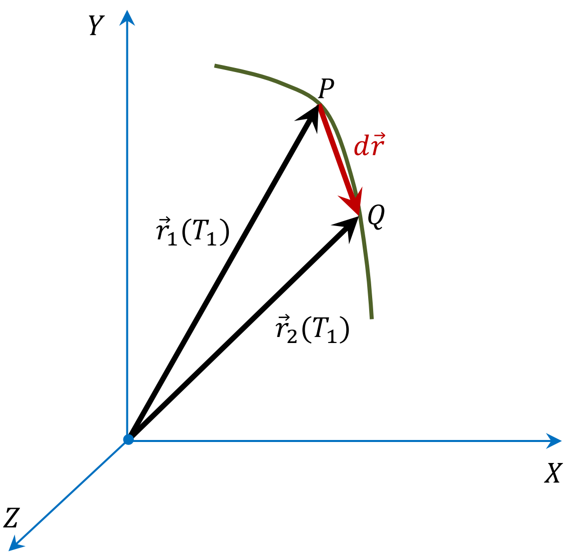

Рис. 4. Мировой радиус-вектор и его приращение.

В результате сложения, вычитания четырехвекторов, а также умножения 4-вектора на величину, не зависящую от системы отсчета — *инвариант,* он же *истинный скаляр* — полученная величина также будет 4-вектором.

Пользуясь этими свойствами, сконструируем 4-вектор, называемый вектором ***энергии—импульса частицы***. Сделаем это в 2 шага (см. рис. 4).

1) Найдем малое приращение мирового радиус вектора:

$$d\vec{\vec{r}} = (cdt; d\vec{r})$$

2) Помножим $d\vec{\vec{r}}$ на массу частицы и поделим на собственное время между событиями P и Q. Получим вектор

$$\vec{\vec{P}} = \left(m\frac{cdt}{d\tau}; m\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\boldsymbol{W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \qquad (\mathbf{15}, \text{а})$$

называемую ***релятивистской энергией частицы***. С учетом (10) она может быть также записана в виде:

$$W = m_{\text{рел}}c^2. \qquad (15, \text{б})$$

Используя (9) и (15), запишем вектор энергии—импульса в виде:

$$\vec{\vec{P}} = \left(\frac{W}{c}; \vec{p}\right). \qquad (16)$$

Вектор $\vec{\vec{P}}$ называют также вектором 4-импульса частицы, тем самым подчеркивается, что он является четырехмерным обобщением импульса. Но при чем здесь энергия? Кроме совпадения размерности, смысл названия величины, определяемой из (15) пока не ясен. Чтобы прояснить его запишем нерелятивистское приближение W, использовав известное соотношение

$$(1+x)^\alpha \cong 1+\alpha x. \qquad (17)$$

Итак, принимая $x = -\beta^2$ и учитывая (13), запишем

$$W = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2} = mc^2\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \qquad (18)$$

Сделанное приближение все объясняет:

В нерелятивистском приближении релятивистская энергия частицы, в качестве слагаемого, содержит ее кинетическую энергию, отличаясь от последней на константу

$$\boldsymbol{W_0 = mc^2}, \qquad (\mathbf{19})$$

называемую *энергией покоя*.

Вообще, это всегда удивительно — узнать старых знакомых там, где, казалось бы, не было даже намека на их существование. Теперь мы можем определить кинетическую энергию и в релятивистском случае, вычтя из полной энергии энергию покоя:

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (20)$$

Однако повод для беспокойства все же остается: его не смотря даже на свое название, вызывает загадочная константа (19), она нигде не встречалась в классической физике. Что это — просто произвольная константа, или в ней есть определенный физический смысл? Ответ на этот вопрос будет дан в следующих пунктах, сейчас же выведем одно важное свойство 4-вектора и применим его для 4-импульса.

Это свойство связано с обобщением понятия длины. Будучи зависимой от системы отсчета, длина предмета в СТО не является константой, присущей данному телу при отсутствии внешних механических воздействий. Но человеческий ум — штука весьма консервативная, поэтому, как только прочная и незыблемая ранее опора уходит из-под ног, он тут же пытается найти ей замену. И замена находится. Оказывается

Величина

$$\left|\vec{\vec{a}}\right| = \sqrt{a_T^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}, \qquad (21)$$

называемая *длиной 4-вектора* является *инвариантом*, то есть не меняется при переходе в другую инерциальную систему отсчета.

Докажем этот факт. Для этого просто перейдем в другую ИСО, воспользовавшись (14) (координаты a_y и a_z можем положить равными нулю, так как они все равно не меняются). Следующая цепочка алгебраических преобразований вполне доступна ученику 8 класса:

$$\vec{\vec{a}}'^2 = {a'_{T'}}^2 - {a'_{x'}}^2 = \left(\frac{a_T - \beta a_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{a_x - \beta a_T}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a_T^2 - 2a_T\beta a_x + \beta^2 a_x^2 - a_x^2 + 2a_x\beta a_T - \beta^2 a_T^2}{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{a_T^2(1-\beta^2) - a_x^2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = \vec{\vec{a}}^2.$$

Применим теперь доказанное свойство для 4-импульса свободной частицы, приравняв длину 4-вектора в произвольной ИСО к длине в СО, где частица покоится:

$$\left|\vec{\vec{P}}\right|^2 = \frac{W^2}{c^2} - p^2 = \frac{W_0^2}{c^2} = m^2c^2.$$

Таким образом, мы доказали, что для свободной частицы имеет место соотношение:

$$\boldsymbol{W^2 - p^2c^2 = m^2c^4}. \qquad (22)$$

Полученная формула вполне может пригодиться при решении конкретных задач.

4. Теорема о полной релятивистской энергии

Введя в рассмотрение релятивистскую силу (4), мы вряд ли задумывались о том, что делать с ней дальше. А дальше хорошо бы, например, получить для нее аналоги энергетических теорем нерелятивистской механики, например, теорему о кинетической энергии. Оказывается это возможно. Как было указано, кинетическая энергия частицы лишь на константу отличается от ее релятивистской энергии. Поэтому теорему о кинетической энергии, в релятивистской динамике, удобно заменить теоремой о релятивистской энергии (ТРЭ). Сформулируем.

Элементарная работа релятивистской силы над материальной точкой равна приращению ее релятивистской энергии:

$$\boldsymbol{\delta A = dW.} \tag{23}$$

∇

Доказательство ТРЭ не содержит принципиальных сложностей, однако оно довольно громоздко в вычислительном смысле. Поэтому нужно быть предельно внимательным. Итак, приступим, начнем справа:

$$dW = \frac{d}{dv}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv = -\frac{1}{2}mc^2\frac{-2\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}dv = \frac{mvdv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Теперь попытаемся прийти к тому же слева:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\vec{v}dt = m\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \vec{v}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}\vec{v}dt =$$

$$= m\frac{d\vec{v}\cdot\vec{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - v^2 dt\frac{-\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Однако

$$d\vec{v}\cdot\vec{v} = d\vec{v}^2 = dv^2 = vdv.$$

Поэтому окончательно

$$\delta A = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}mvdv = dW.$$

∇

5. Релятивистская энергия и импульс системы. Закон сохранения релятивистской энергии при столкновениях

Рассмотрим замкнутую систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом только при столкновениях. Для каждой точки мы можем составить вектор 4-импульса. Следовательно, существует 4-импульс системы

$$\vec{\vec{P}}_{\text{сист}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i}{c}; \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right) = \left(\frac{W_{\text{сист}}}{c}; \vec{p}_{\text{сист}}\right),$$

а также его изменение:

$$\Delta\vec{\vec{P}}_{\text{сист}} = \left(\frac{\Delta W_{\text{сист}}}{c};\Delta\vec{p}_{\text{сист}}\right),$$

которое при переходе в другую ИСО преобразуется в соответствии с (14). В частности

$$\Delta p'_{\text{сист}_x} = \frac{\Delta p_{\text{сист}_x} - \beta\frac{\Delta W_{\text{сист}}}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta\frac{\Delta W_{\text{сист}}}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{24}$$

поскольку $\Delta p_{\text{сист}_x} = 0$. Замкнутость системы здесь следует понимать в смысле полной ее изолированности, то есть отсутствия воздействия на нее со стороны чего бы то ни было. Ясно, что при переходе в другую систему отсчета что-то из ничего возникнуть не может. Поэтому, если импульс замкнутой системы тел сохраняется в одной ИСО, то он будет сохраняться в любой инерциальной системе отсчета. Стало быть и $\Delta p'_{\text{сист}_x} = 0$. Следовательно $W_{\text{сист}} = const$. Таким образом, мы доказали

Закон сохранения релятивистской энергии

Релятивистская энергия замкнутой системы частиц, взаимодействующих только при столкновениях, сохраняется:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = const \Leftrightarrow \forall\vec{F}_{\text{внеш}} = 0.} \tag{25}$$

В (25) может входить, в том числе, и энергия покоя, тем самым вопрос о наличии у нее физического смысла получает ответ. В качестве примера рассмотрим абсолютно неупругое соударение двух частиц массы m, движущихся навстречу друг другу со скоростями, равными половине световой, и найдем массу M образовавшейся в результате столкновения частицы. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = Mc^2.$$

Отсюда

$$M = \frac{4}{\sqrt{3}}m > 2m.$$

Как видим, масса покоя образовавшейся частицы больше суммы масс покоя образовавших ее частиц[2]. Произошло это потому, что кинетическая энергия системы перешла в энергию покоя.

[2] Релятивистская масса системы, кстати, не изменилась. То есть, если внешний наблюдатель воспринимает систему как единый массивный объект, то он не почувствует столкновения.

6. Закон сохранения энергии и импульса при наличии поля. Природа массы покоя макроскопических тел.

Можно, однако, поставить вопрос о том, из чего состоит добавленная масса, возникающая при неупругом столкновении, если образовавшаяся частица не является элементарной. Чтобы ответить на него, будем рассуждать следующим образом. Также как мы сформулировали и доказали релятивистский аналог теоремы о кинетической энергии, можно попытаться сформулировать соответствующие теоремы для потенциальной и механической энергии. Однако с потенциальной энергией возникают проблемы, суть которых в следующем. Рассмотрим произвольное центральное силовое поле, которое, в силу центральности, является потенциальным. Пусть его источником является некоторый массивный заряд Q (не обязательно электрический), покоящийся в начале координат некоторой инерциальной системы отсчета K (рис. 5). Рассмотрим два пробных заряда q, один из которых движется со скоростью $\vec{v}$ вдоль оси X и находится на оси X, а другой движется с той же скоростью, но в рассматриваемый момент времени находится на оси Y. При этом оба заряда находятся на одинаковом расстоянии r от силового центра Q. В таком случае, в системе центра на них должны действовать одинаковые силы. Посмотрим теперь, какие силы действуют на заряды в ИСО K', связанной с ними самими. Для этого построим 4-вектор силы

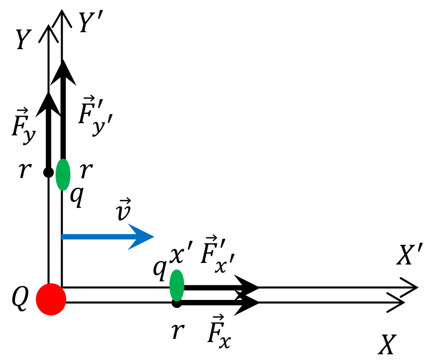

Рис. 5. Лоренц-преобразование центрального силового поля

$$\vec{\vec{F}} = \frac{d\vec{\vec{P}}}{d\tau} = \left(\frac{dW/dt}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{d\vec{p}/dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \quad (26)$$

Как легко видеть, временна́я компонента 4-силы содержит мощность, а пространственная — обычную трехмерную силу. Таким образом

$$\vec{\vec{F}} = \left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \quad (27)$$

Здесь $\vec{v}$ — вообще говоря, скорость пробного заряда, но в нашем случае она совпадает со скоростью K'.

Перейдем в K', используя преобразование Лоренца:

$$\frac{F'_{x'}}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = \frac{\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2}\vec{F}\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x.$$

$$\frac{F'_{y'}}{\sqrt{1-\frac{0^2}{c^2}}} = \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом:

$$F'_{x'} = F_x. \quad (28, а)$$

$$F'_{y'} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (28, б)$$

Однако преобразованию Лоренца будет подвергнута также и координата пробного заряда на оси X, теперь она будет равна не r, а

$$x' = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (29)$$

Стало быть, продольная сила не изменилась, но расстояние до центра стало меньше. Тогда, если силовое поле убывает с расстоянием, на удалении r, уже в K', продольная сила станет меньше. Поперечная же сила, если заряды притягиваются, увеличилась. Следовательно, в K' силовое поле перестает быть центральным, а значит, оно теперь не будет потенциальным. Этот факт окончательно хоронит надежды на построение релятивистской энергетики по принципу ньютоновской.

И все же, задача разрешима. Как известно, еще из классической электродинамики, энергию электромагнитного взаимодействия можно представить как энергию электромагнитного поля, выраженную через напряженности электрического и магнитного полей, а также электрические и магнитные проницаемости и постоянные:

$$W_{\text{поля}} = \int_V \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right) dV. \quad (30)$$

Известно, также, что основные уравнения электродинамики Максвелла сформулированы для произвольной инерциальной системы отсчета. Иначе и быть не может, ибо в противном случае скорость распространения электромагнитных волн, то есть скорость света, зависела бы от системы отсчета. Электромагнитное поле имеет статус самостоятельной реальности, стало быть, соотношения определяющие энергию электрического и магнитного поля останутся в силе в любой инерциальной системе отсчета. Тогда, по крайней мере, в рамках классической электродинамики, мы все же можем сформулировать релятивистский аналог теоремы о потенциальной энергии, если убыль последней заменим убылью энергии электромагнитного поля:

$$\delta A_{\text{поля}} = -dW_{\text{поля}}. \quad (31)$$

Подставив (23) в (30), с учетом (15), получим

Закон сохранения энергии:

Для замкнутой системы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{m_i c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}} + \sum \boldsymbol{W}_{\text{поля}} = \boldsymbol{const}. \quad (\mathbf{32}, а)$$

Или короче:

$$\boldsymbol{W}_{\text{рел}} + \boldsymbol{W}_{\text{поля}} = \boldsymbol{const}. \qquad (\mathbf{32}, \text{б})$$

В частности для системы частиц, взаимодействующих друг с другом посредством только электромагнитного поля,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} + \int_V \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) dV = const. \qquad (33)$$

Рассмотрим теперь снова два тела суммарной релятивистской энергией W, провзаимодействовавших при неупругом столкновении, в результате которого образуется покоящееся тело массы M. Однако пусть на этот раз тела будут составными объектами. Поскольку до сих пор не ясно, из чего состоит масса покоя таких тел, разгоним сталкивающиеся тела до ультрарелятивистских скоростей, тогда их энергией покоя можно будет пренебречь. С одной стороны, согласно (25),

$$W = Mc^2. \qquad (34)$$

С другой стороны, согласно (32),

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} + W_{\text{поля}}, \qquad (35)$$

где, m_i и v_i — соответственно масса и скотость i-й частицы, входящей в состав образовавшегося тела. Объединяя (34) и (35), получим

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} + \frac{W_{\text{поля}}}{c^2}. \qquad (36, \text{а})$$

Или с учетом (10)

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{\text{рел}_i} + \frac{W_{\text{поля}}}{c^2}. \qquad (36, \text{а})$$

Таким образом, масса покоя составного тела состоит не только из масс составляющих его частиц, притом релятивистских, но такжи из эквивалентной массе энергии создаваемого частицами поля. Вторую часть массы так и называют — *полевой*. Собственно говоря, с позиций физики элементарных частиц, поле типа электромагнитного, также создается частицами, особенность которых лишь в том, что у них нулевая масса покоя.

И в завершение вернемся к вопросу об импульсе замкнутой системы. Как было отмечено в конце п. 2, импульс такой системы не будет сохраняться в общем релятивистском случае, если рассматривать его только как сумму импульсов составляющих систему массивных частиц. Но теперь уже нетрудно догадаться, что следует сделать, чтобы импульс системы все-таки сохранялся. Очевидно, к суммарному импульсу частиц нужно добавить импульс создаваемого ими поля, только в этом случае у нас есть шанс «спасти» закон сохранения импульса, не «размазывая» его во времени. Таким образом, закон сохранения импульса для произвольной змкнутой системы выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{m_i \vec{v}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}} + \sum \vec{\boldsymbol{p}}_{\text{поля}} = \boldsymbol{const}. \qquad (\mathbf{37})$$

Импульс электромагнитного поля переносится электромагнитной волной. Сгусток электромагнитных волн, *волновой пакет*, можно представить в виде безмассовой частицы — *фотона*. Используя (11) и (15, б) для фотона, получим связь межде его импульсом и энергией:

$$p_{\text{ф}} = \frac{W}{c}. \qquad (38)$$

В свою очередь

$$W = \int_V w dV, \qquad (39)$$

где w — плотность энергии электромагнитного поля. Но, как известно, плотность энергии электрического и магнитного полей в электромагнитной волне равны друг другу:

$$w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_{\text{маг}} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \qquad (40)$$

Тогда

$$w = 2\sqrt{w_{\text{эл}} w_{\text{маг}}} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH. \qquad (41)$$

Очевидно в нашем случае $\varepsilon = \mu = 1$ поскольку среду мы рассматриваем как частицы, поэтому поле — в вакууме. В свою очередь

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{4\pi k\mu_0} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}}} = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad (41)$$

а это скорость света в вакууме. Тогда, испльзуя (38) — (41), и учитывая связь между направлением распространения электромагнитной волны и направлениями векторов волнового электрического и магнитного полей, для импульса электромагнитного поля получаем соотношение:

$$\vec{p}_{\text{эмп}} = \int_V \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} dV. \qquad (42)$$

7. Разгон до субсветовой скорости. Фотоны, брадионы, тахионы

Рассмотрим ракету будущего, способную разогнаться до околосветовой скорости. Для описания ее движения будем использовать так называемую сопутствующую ИСО, обозначим ее для краткости аббревиатурой СИС. Это инерциальная система отсчета, скорость которой относительно лабораторной системы отсчета в рассматриваемый, в лаборатории, момент времени совпадает со скоростью ракеты в этот момент времени. Потребуем, чтобы изменение массы ракеты было пренебрежимо малым, а сила тяги $\vec{F}$ во всех СИС была одной и той же (в механике Ньютона такое движение называлось бы равноускоренным). Таким образом, в любой СИС ускорение ракеты

$$a' = \frac{F}{m}.$$

Найдем теперь ускорение ракеты в лабораторной ИСО

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_2 - v}{d\tau \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{43}$$

где v и v_2 – скорости ракеты в данный и последующий момент времени (при этом v является также скоростью СИС), $d\tau$ — собственное время изменения скорости ракеты в СИС. Пользуясь законом сложения скоростей, выразим скорость v_2, через соответствующую скорость ракеты в ракеты в СИС

$$v_2 = \frac{v_2' + v}{1 + \frac{v_2' v}{c^2}}. \tag{44}$$

Подставим (43) в (44):

$$a = \frac{\frac{v_2' + v}{1 + \frac{v_2' v}{c^2}} - v}{d\tau \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(v_2' + v - v - v_2' \frac{v^2}{c^2}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{d\tau \left(1 + \frac{v_2' v}{c^2}\right)} = \frac{v_2'}{d\tau} \cdot \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{v_2' v}{c^2}\right)}.$$

Но

$$\frac{v_2'}{d\tau} = a',$$

а

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{v_2' v}{c^2} = 0.$$

Таким образом, окончательно

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \tag{45}$$

Соотношение (45) способно повергнуть в беспросветное уныньe юный романтический ум, мечтающий о межгалактических путешествиях. Ибо, как не трудно видеть,

$$\lim_{v \to c} a = 0.$$

То есть, несмотря на то, что космический корабль будет создавать постоянную (относительно себя) силу тяги, для внешнего наблюдателя его ускорение с течением времени будет стремиться к нулю. Увы, он никогда не достигнет скорости света! Он может только приблизиться к ней[3]. Именно в этом факте замедления ускорения смысл известного высказывания о максимальности скорости света.

И все-таки скорость света достижима! Фотон ведь достиг. А почему? Образно говоря, он таким родился. Действительно, если скорость частицы изначально равна скорости света, ее уже не нужно до этой скорости разгонять. Но импульс фотона, разве не будет тогда бесконечным? Нет, ведь его масса покоя равна нулю, поэтому импульс фотона определяется согласно (38) или (42).

Таким образом, со скоростью света можно родиться. Ну а нельзя ли также изначально родиться со сверхсветовой скоростью? В принципе, никаких запретов на существование сверхсветовых частиц, *тахионов,* в СТО нет. Одно время их даже пытались искать. Сейчас тахионные поля используются для описания ранних стадий развития Вселенной. Также происходит сверхсветовое убегание от нас далеких галактик, недоступных нашему восприятию (потому и недоступны). Коммуникация элементарных частиц в так называемом перепутанном состоянии также происходит мгновенно. Однако активное взаимодействие тахионов с досветовыми частицами, *брадионами*, способно приводить к возможности если не путешествий во времени, то хотя бы передаче сигнала в прошлое, что, в свою очередь, может породить конфликт с принципом причинности. Чтобы избежать его нужно вводить соответствующие ограничения, но это уже совсем другая история…

[3] Но даже если наш космический корабль разгонится практически до световой скорости, чтобы отправиться, скажем, к Туманности Андромеды, земляне будут ждать его возвращения… 5 млн. лет.