Определенный интеграл. Графический смысл перемещения.

Если тело движется прямолинейно и равномерно, то для определения перемещения тела достаточно знать его скорость и время движения. Но как подойти к решению этой задачи при произвольном движении тела? В общем случае можно разбить всю траекторию, на столь малые участки, что скорость тела на каждом из них можно будет считать постоянной (рис.1) Тогда полное перемещение будет равно сумме элементарных перемещений:

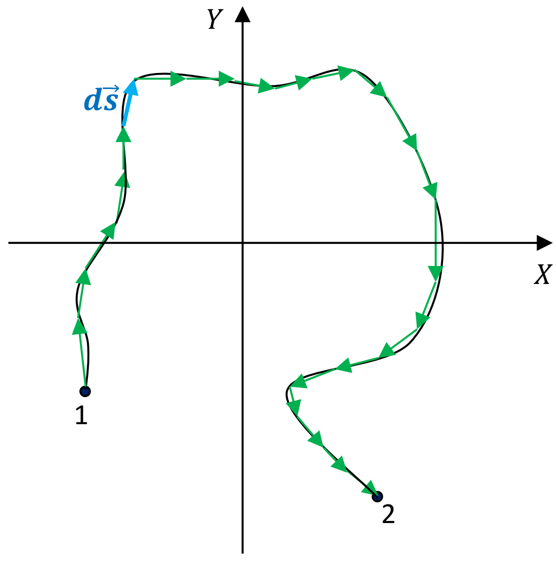

Рис. 1

$$\vec{s} = \sum_{\text{точка } 1}^{\text{точка } 2} d\vec{s} = \sum_{\text{точка } 1}^{\text{точка } 2} \vec{v}dt \qquad (1)$$

Соотношения типа (1) в физике принято записывать иначе. Введем следующее определение:

Сумма, как правило, большого количества малых величин называется в физике *<u>определённым интегралом</u>* и обозначается символом - ∫.

С помощью символа интеграла (1) можно записать в виде

$$\vec{s} = \int_{т.1}^{т.2} d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_1} \vec{v}dt. \qquad (2)$$

В проекции на некоторую ось X (2) примет вид:

$$s_x = \int_{т.1}^{т.2} ds_x = \int_{t_1}^{t_1} v_x dt. \qquad (3)$$

Как видим из рис. 2, проекция элементарного перемещения —

$$ds_x = v_x dt$$

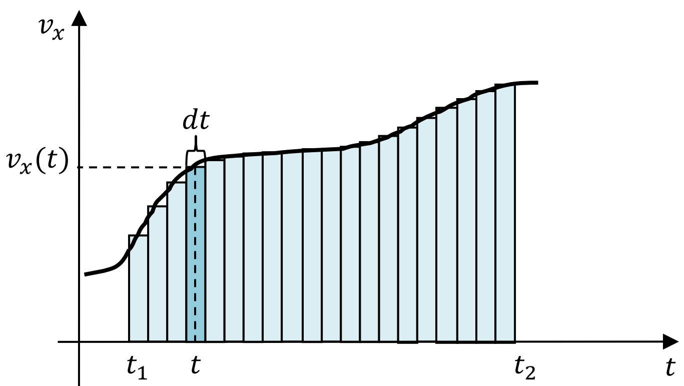

Рис.2

численно равна площади вертикального столбика. Для наглядности на рисунке он изображен более темным, нежели остальные, но выбран абсолютно произвольно. Тогда, согласно (3) проекция полного перемещения будет численно равна сумме площадей всех таких столбцов, заключенных в промежутке между t_1 и t_2. Но «толщина» каждого столбца (время dt) может быть сделана сколь угодно малой. А, стало быть, площадь фигуры из столбцов сколь угодно точно совпадает с площадью фигуры ограниченной графиком скорости, граничными значениями времени и самой осью времени. Ее принято называть *площадью под графиком* проекции скорости. Помимо размерности, площадь под графиком отличается от геометрической площади еще и тем что может иметь отрицательный знак. Так будет, если проекция скорости на соответственном участке отрицательна. И наконец, если проекция скорости меняет знак, то площадь под ее графиком, очевидно, равна алгебраической сумме площадей участков графика, расположенных под и над осью времени.

Проекция перемещения, численно и с учетом знака, равна площади под графиком проекции скорости.

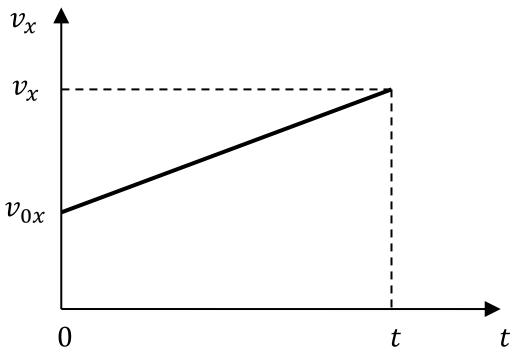

Рис. 3

В качестве примера получим формулу проекции перемещения в равноускоренном движении. Как видим из рис. 3, проекция перемещения численно равна площади трапеции:

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t.$$

Однако так легко этот результат получается только, если график проекции скорости не пересекает ось времени. В противном случае, для получения той же формулы, необходимы дополнительные ухищрения, а, кроме того, придется рассмотреть по отдельности сами случаи (всего их 4). Наконец, если мы хотим получить формулу в векторном виде, то от проекций надо будет перейти к вектору перемещения. Все это наводит на мысль получить формулу перемещения в равноускоренном движении сразу в общем векторном виде.

Равнопеременное движение.
Основная формула перемещения.

Движение, происходящее с постоянным ускорением, называется *равнопеременным:*

$$\text{РпД} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = const \qquad (3)$$

Поскольку (3) выполняется для любого промежутка времени t, то любое приращение скорости $\vec{v} - \vec{v}_0$ (и сам временной промежуток) в РпД является элементарным. Таким образом, в равноускоренном движении среднее ускорение совпадает с мгновенным, поэтому в РпД можно говорить просто об ускорении, не уточняя, о чем именно идет речь.

Как видим из (3), для равнопеременного движения справедлив закон скорости:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{3'}$$

Согласно формуле (2), перемещение в произвольном движении может быть найдено по формуле

$$\vec{s} = \int_{t_1}^{t_1} \vec{v}dt.$$

Это, разумеется, остается верным и в РпД. Поставим задачу найти перемещение как функцию времени: $\vec{s} = \vec{s}(t)$. Пусть $t_1 = 0$ — начальное значение времени, а $t_2 = t$. Тогда

$$\vec{s}(t) = \int_{0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Под знаком интеграла мы заменили t на τ, поскольку t, будучи аргументом $\vec{s}$, является *верхним пределом* интегрирования. Подставляя в (4) закон скорости, получим:

$$\vec{s}(t) = \int_{0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}\tau)d\tau = \int_{0}^{t} (\vec{v}_0 d\tau + \vec{a}\tau d\tau). \tag{5}$$

Далее

$$\int_{0}^{t} (\vec{v}_0 d\tau + \vec{a}\tau d\tau) = \vec{v}_0 \int_{0}^{t} d\tau + \vec{a} \int_{0}^{t} \tau d\tau. \tag{6}$$

Этот переход, хотя и может, на первый взгляд, показаться неожиданным и пугающим, на самом деле является простым следствием переместительного и распределительного законов сложения. Ведь интеграл сам является суммой. И поскольку, в принципе, не важно, из какого числа слагаемых он состоит, мы проиллюстрируем (5) на примере трех слагаемых. Пусть τ_1, τ_2, τ_3 — значения времени, принадлежащие промежутку $(0; t)$, а $d\tau_1, d\tau_2, d\tau_3$ — малые промежутки времени, такие что $\tau_1 \in d\tau_1,\ \tau_2 \in d\tau_2,\ \tau_3 \in d\tau_3$, а $d\tau_1 + d\tau_2 + d\tau_3 = t$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{t} (\vec{v}_0 d\tau + \vec{a}\tau d\tau) &= (\vec{v}_0 d\tau_1 + \vec{a}\tau_1 d\tau_1) + (\vec{v}_0 d\tau_2 + \vec{a}\tau_2 d\tau_2) + (\vec{v}_0 d\tau_3 + \vec{a}\tau_3 d\tau_3) = \\
&= (\vec{v}_0 d\tau_1 + \vec{v}_0 d\tau_2 + \vec{v}_0 d\tau_3) + (\vec{a}\tau_1 d\tau_1 + \vec{a}\tau_2 d\tau_2 + \vec{a}\tau_3 d\tau_3) = \\
&= \vec{v}_0(d\tau_1 + d\tau_2 + d\tau_3) + \vec{a}(\tau_1 d\tau_1 + \tau_2 d\tau_2 + \tau_3 d\tau_3) = \vec{v}_0 \int_{0}^{t} d\tau + \vec{a} \int_{0}^{t} \tau d\tau.
\end{aligned}$$

Для большего числа слагаемых доказательство (6) будет отличаться только тем…, что в его выкладках будет большее число слагаемых. Из получившихся интегралов первый очевиден

$$\int_{0}^{t} d\tau = t. \tag{7}$$

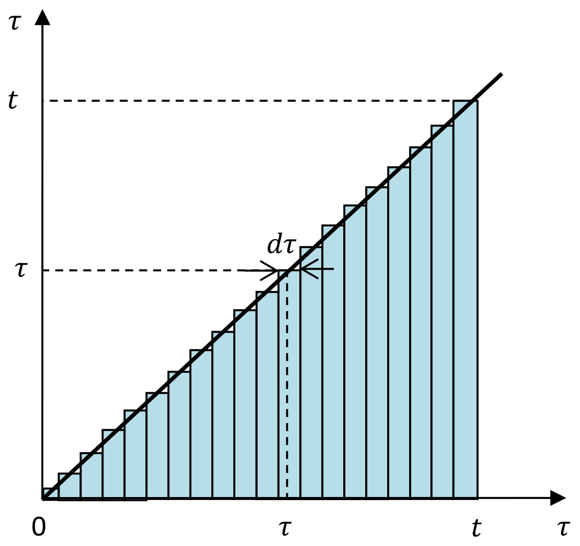

Рис. 4

Для вычисления второго интеграла снова воспользуемся графическим методом. В нашем случае по обеим осям следует отложить одну и ту же переменную τ. Единственное, что мы в таком случае можем провести — это биссектриса координатного угла. Снова строим узкие столбики. Тогда $\tau d\tau$ будет численно равен площади столбика, а сам интеграл равен суммарной площади всех столбцов. Ну а поскольку $d\tau$ снова-таки делается очень маленьким, то эта площадь равна площади прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом равным t. Таким образом

$$\int_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6), а (6) в (5), получим окончательную формулу перемещения в РпД:

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (9)$$

В проекции на произвольно направленную ось (9) примет вид

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (10)$$

Другие формулы перемещения в РпД.

Для определения перемещения в РпД, в принципе, достаточно знать любые три из четырех величин: $\vec{v}_0, \vec{v}_{конеч}, \vec{a}$ и t. Таким образом, возможны 4 формулы с их участием, одну из них мы уже получили. Но в конкретной задаче, более удобной может оказаться какая-либо другая формула. Поэтому получим три оставшиеся формулы перемещения в РпД.

Формула без начальной скорости.

Выразим (3) $\vec{v}_0$ и подставим в (9), получим:

$$\vec{S} = \vec{v}t - \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (11)$$

Формула без ускорения.

Сложим (9) и (11), получим:

$$\vec{S} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} t. \qquad (12)$$

Формула без времени. Здесь очевидно следовало бы выразить из (3) время. Тогда получим:

$$t = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\vec{a}}$$

Операция деления на вектор, хотя в принципе и может быть введена в математике, но сделать это возможно различными способами, не все из которых дают однозначный результат. Чтобы, ради одной формулы, не вдаваться в целый раздел, перейдем в формуле ускорения и в (12) к проекциям:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$$

Выразим из последней формулы t. Получим

$$\boldsymbol{S_x = \frac{v^2{}_x - v^2{}_{0x}}{2a_x}}. \tag{13}$$

Уравнение РпД

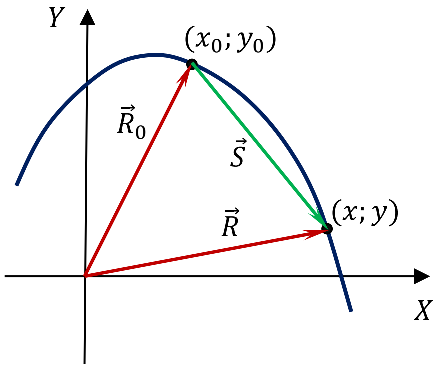

Рис. 5

Согласно (9) и рис. 5

$$\vec{R} - \vec{R}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}}. \tag{14}$$

Это и есть уравнение РпД в векторном виде. Проецируя на оси, получим уравнение РпД в координатном виде:

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases}} \tag{15}$$

В принципе аналогичное уравнение можно получить и для координаты z, но вектор скорости в РпД, в любой момент времени лежит в плоскости, содержащей векторы начальной скорости и ускорения. Стало быть, равнопеременное движение всегда является плоским: его траекторией будет либо прямая, либо парабола.