Б.Ю.Коган

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ. Пособие для учителей

Предлагаемый сборник состоит из задач повышенной трудности по курсу элементарной физики. Он предназначен для учителей, а также для лиц, готовящихся к поступлению в вузы, предъявляющие повышенные требования к знанию физики. Сборник содержит 700 задач, снабженных решениями, и ответы ко всем задачам. В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения, относящиеся к рассматриваемой теме.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник состоит из задач повышенной трудности по курсу элементарной физики. Он предназначен для учителей, а также для лиц, готовящихся к поступлению в вузы, предъявляющие повышенные требования к знанию физики. Сборник содержит 700 задач, снабженных решениями, и ответы ко всем задачам. В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения, относящиеся к рассматриваемой теме.

В ряде разделов сборника применяются сведения, лежащие «на грани» школьного курса физики и, как правило, не используемые в средней школе. К ним относятся: три уравнения равновесия твердого тела, уравнения движения материальной точки в координатной форме, силы инерции в поступательно движущихся системах отсчета, газовые законы в форме Менделеева—Клапейрона и Больцмана, формулы для параллельного соединения источников э.д.с., метод узловых потенциалов при расчете электрических цепей, а также некоторые другие правила и формулы. Эти сведения вполне элементарны и в то же время заметно упрощают решение ряда задач.

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I
МЕХАНИКА

§ 1. КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Равномерное движение

Если тело движется равномерно, то

$$s = vt,$$

где s — пройденный путь, v — скорость и t — время.

1. Бамбук растет со скоростью около 0,001 *см/сек*. На сколько он вырастает за сутки?

2. Скорость распространения сигнала по нервным волокнам можно принять равной 50 *м/сек*. Вообразим, что рука человека стала настолько длинной, что он сумел дотянуться до Солнца. Через какое время он почувствует боль от ожога?

3. Точка движется по оси x согласно закону $x = 2 + 5t$, где t измеряется в секундах, а x — в метрах. Какова скорость этой точки?

4. По оси x движутся две точки: первая — по закону $x_1 = 10 + 2t$, а вторая — по закону $x_2 = 4 + 5t$. В какой момент времени они встретятся?

5. Поезд, вышедший в 12 *ч* дня из пункта A, движется со скоростью $v_1 = 60$ *км/ч*. Поезд, вышедший в 2 *ч* дня из пункта B, движется со скоростью $v_2 = 40$ *км/ч* навстречу первому поезду. В котором часу они встретятся, если расстояние AB равно $s = 420$ *км*?

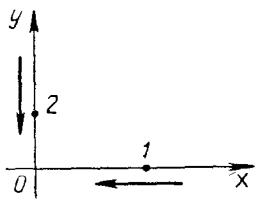


Рис. 1

6. Из начала координат одновременно начинают движение две точки. Первая движется по оси x со скоростью $v_1 = 3$ *м/сек*, а вторая — по оси y со скоростью $v_2 = 4$ *м/сек*. С какой скоростью они удаляются друг от друга?

7. Точки *1* и *2* движутся по осям x и y (рис. 1). В момент $t = 0$ точка *1* находится на расстоянии $s_1 = 10$ *см*, а точка *2* — на расстоянии $s_2 = 5$ *см* от начала координат. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 2$ *см/сек*, а вторая — со скоростью $v_2 = 4$ *см/сек*. Встретятся ли они?

8. Каково наименьшее расстояние между точками, о которых говорилось в предыдущей задаче?

9. Прямая, образующая угол 30° с положительным направлением оси x и угол 60° с положительным направлением оси y, движется в направлении оси x со скоростью v. С какой скоростью движется точка пересечения этой прямой с осью y?

2. Неравномерное и равнопеременное движение

Если в течение времени t тело перемещается на расстояние s, то его средняя скорость равна

$$\bar{v} = \frac{s}{t}.$$

Понятие средней скорости имеет смысл только по отношению к некоторому интервалу времени (в отличие от мгновенной скорости, относящейся к определенному моменту времени).

Равнопеременное движение описывается формулами:

$$v = v_0 + at, \tag{1}$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{2}$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2}\, t, \tag{3}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as, \tag{4}$$

где a — ускорение, t — время, v_0 — начальная скорость (скорость в момент $t = 0$) и s — перемещение. Все фигурирующие здесь величины являются алгебраическими, т. е. могут быть как положительными, так и отрицательными (см. задачи 15, 16, 17, 18). При этом предполагается, что на прямой, по которой совершается движение, выбрано определенное положительное направление. Пусть, например, рассматривается движение камня, брошенного вертикально вверх. Тогда, если направление вверх считать положительным, скорость камня будет сначала положительной, а затем — отрицательной. Ускорение же камня будет все время отрицательным (так как вектор ускорения направлен вниз, т. е. в отрицательную сторону).

Следует помнить, что символ s в формулах (2), (3), (4) обозначает *не путь, а перемещение*. Например, если камень поднимается на 10 *м*, а затем опускается на 2 *м*, то путь, пройденный камнем, равен 12 *м*, а перемещение камня равно 8 *м*.

Движение называется ускоренным, если его скорость увеличивается (по абсолютной величине), и замедленным, если она уменьшается. Например, брошенный вверх камень движется сначала замедленно, а затем — ускоренно. При этом формулы (1) —(4) будут справедливы в течение всего времени движения камня (а ускорение a будет равно 9,8 *м/сек*^{2} или —9,8 *м/сек*^{2}, в зависимости от того, какое направление считается положительным).

10. Брошенный вверх камень поднимается на высоту 10 *м* и падает обратно. Какова средняя скорость камня за время движения?

11. Первую половину пути поезд движется со скоростью $v_1 = 40$ *км/ч*, а вторую — со скоростью $v_2 = 60$ *км/ч*. Какова средняя скорость поезда?

12. Точка движется по закону $s = 5(t - 3)^2$, где s измеряется в метрах, а t — в секундах. Каково ее ускорение?

13. Точка движется по оси x согласно закону $x = 2 - 10t + 3t^2$ (x измеряется в метрах, а t — в секундах). Какова ее начальная скорость (в момент $t = 0$) и каково ускорение?

14. Камень брошен вертикально вверх со скоростью 24,5 *м/сек*. Через какой промежуток времени он будет на высоте 29,4 *м*?

15. Человек, стоящий на краю высохшего колодца, бросает вертикально вверх камень, сообщая ему скорость 9,8 *м/сек*. Через какой промежуток времени камень упадет на дно колодца? Глубина колодца 14,7 *м*.

16. Камень бросают с башни, сообщая ему начальную скорость, направленную вниз. 1) Какой должна она быть, чтобы камень за время $t = 2$ *сек* опустился на 30 *м*? 2) Какой должна быть эта скорость, чтобы камень за 2 *сек* опустился на 10 *м*?

17. Автомобиль движется с постоянным ускорением $a = 1$ *м/сек*^{2}. В данный момент он имеет скорость 10,5 *м/сек*. Где он был секунду назад?

18. Точка движется с постоянным ускорением по оси x, имея начальную скорость 10 *м/сек* (в положительном направлении). Каким должно быть ее ускорение, чтобы она за 2 *сек* сместилась в положительном направлении на 10 *м*?

19. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 14 *м/сек*. На какую высоту поднимется оно за 2 *сек*? Какой путь пройдет за это время?

20. Поезд начинает движение из состояния покоя и равномерно увеличивает свою скорость. На первом километре она возросла на 10 *м/сек*. На сколько возрастет она на втором километре?

21. Автомобиль трогается с места и первый километр проходит с ускорением a_1, а второй — с ускорением a_2. При этом на первом километре его скорость возрастает на 10 *м/сек*, а на втором — на 5 *м/сек*. Что больше: a_1 или a_2?

22. Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0. Можно ли так подобрать эту скорость, чтобы, двигаясь вверх, тело поднялось за 2 *сек* на 10 *м*?

23. Тело двигалось по оси x с постоянным ускорением. В точке $x_2 = 2$ *м* оно имело скорость $v_2 = 2$ *м/сек*, а в точке $x_3 = 3$ *м* имело скорость $v_3 = 3$ *м/сек*. (Обе скорости направлены в положительную сторону оси x.) Было ли это тело в точке $x_1 = 1$ *м*?

24. Тело, двигавшееся равномерно ускоренно, прошло за первую секунду 1 *м*, за вторую — 2 *м*, за третью — 3 *м* и т. д. Какова его начальная скорость?

25. Из точки A выходит тело, движущееся с начальной скоростью $v_1 = 3$ *м/сек* и ускорением $a_1 = 2$ *м/сек*^{2}. Спустя секунду из точки B выходит другое тело, движущееся навстречу первому с постоянной скоростью $v_2 = 5$ *м/сек*. Расстояние AB равно $s = 100$ *м*. Сколько времени будет двигаться первое тело до встречи со вторым?

3. Графики движения

26. На рис. 2 показан график скорости некоторого тела (двигавшегося прямолинейно). Опишите качественно это движение.

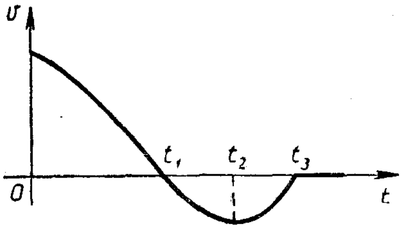


Рис. 2

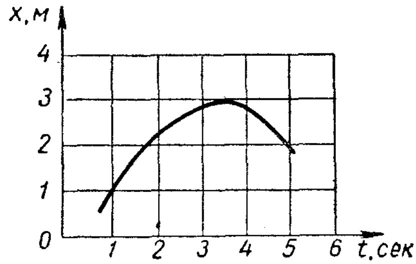


Рис. 3

27. Точка двигалась вдоль оси x согласно графику, изображенному на рис. 3. Какой путь прошла она за время от $t = 1$ *сек* до $t = 5$ *сек*? Какова ее средняя скорость в этом интервале?

28. Тело двигалось вдоль оси x в соответствии с графиком, показанным на рис. 2. В какие моменты времени его ускорение положительно и в какие — отрицательно? В какие моменты времени движение этого тела ускоренное и в какие — замедленное?

29. Точки *1* и *2* двигались по оси x согласно графикам, показанным на рис. 4. В какой момент времени они встретились? У какой из них была в этот момент бóльшая скорость?

30. На рис. 5 показана зависимость скорости тела от его координаты (тело двигалось вдоль оси x). Где оно имело большее ускорение: в точке $x = x_1$ или в точке $x = x_2$?

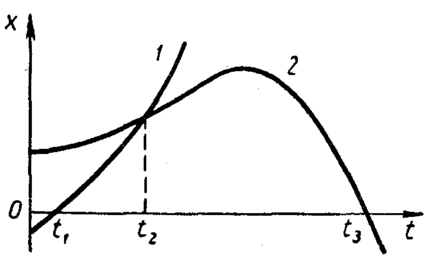


Рис. 4

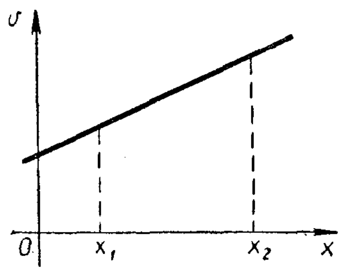


Рис. 5

§ 2. КИНЕМАТИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Криволинейное движение точки удобно исследовать с помощью системы координат (рис. 6). Положение этой точки в тот или иной момент времени определяется ее координатами x, y, изменяющимися с течением времени. Формулы, выражающие зависимость x и y от t, называются *кинематическими уравнениями движения*.

Если материальная точка движется под действием силы тяжести, то

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)\, t, \tag{5}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}, \tag{6}$$

где x_0, y_0 — координаты точки в момент $t = 0$, v_0 — начальная скорость и α — угол наклона вектора v_0 к оси x (рис. 6). Первое из этих уравнений описывает движение точки в направлении оси x; оно совершается с постоянной скоростью $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ (горизонтальная составляющая скорости v_0). Второе уравнение описывает движение в направлении оси y; оно совершается с начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ (вертикальная составляющая скорости v_0) и ускорением $-g$. Скорость этой точки в тот или иной момент времени можно рассматривать как геометрическую сумму скоростей v_x и v_y. Первая из них представляет скорость перемещения в направлении оси x, а вторая — в направлении оси y.

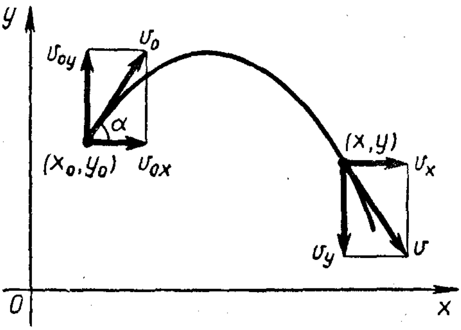


Рис. 6

31. Материальная точка движется согласно уравнениям

$$x = 2t + 6,$$
$$y = t^2.$$

Проходит ли ее траектория через точку $x = 10$, $y = 15$?

32. Точка *1* движется согласно уравнениям

$$x_1 = 2t,\quad y_1 = 5t,$$

а точка *2* — согласно уравнениям

$$x_2 = t + 1,\quad y_2 = t^2 + 4.$$

Встретятся ли эти точки?

33. Точка движется согласно уравнениям

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 4t$$

(x и y измеряются в метрах, а t — в секундах). Какова ее скорость?

34. Под каким углом к горизонту следует бросить камень со скоростью $v_0 = 14$ *м/сек*, чтобы дальность его полета была равна 10 *м*?

35. Камень брошен из начала координат со скоростью $v_0 = 14$ *м/сек*. Под каким углом к горизонту нужно его бросить, чтобы он попал в точку с координатами $x = 10$ *м*, $y = 7{,}5$ *м*?

36. Снаряд выпущен под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Написать уравнение его траектории (считая, что снаряд вылетает из начала координат).

37. Камень, брошенный горизонтально с высоты $h = 2{,}5$ *м*, упал на расстоянии $s = 10$ *м* от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости.

38. Камень, брошенный со скоростью $v_0 = 10$ *м/сек*, имел спустя 1 *сек* скорость $v = 8$ *м/сек*. Под каким углом был брошен камень?

39. Тело бросают с земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти дальность полета и максимальную высоту подъема.

40. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы дальность его полета была втрое больше максимальной высоты его подъема?

41. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы дальность его полета была наибольшей (при заданном значении начальной скорости)?

42. Гора образует угол φ с горизонтом (рис. 7). У подножия горы стоит орудие, стреляющее под углом α с начальной скоростью v_0. Какова дальность полета снаряда (в горизонтальном направлении)?

43. Самолет летит на высоте $h = 1500$ *м* с горизонтальной скоростью $v = 200$ *м/сек*. Из орудия производят выстрел по самолету в момент, когда последний находится на одной вертикали с орудием. Под каким углом следует произвести выстрел, чтобы попасть в самолет? Начальная скорость снаряда равна $v_0 = 900$ *м/сек*.

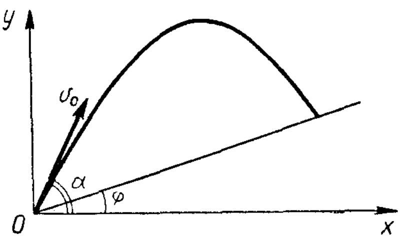


Рис. 7

§ 3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Вращение вокруг неподвижной оси

Быстрота вращения тела характеризуется угловой скоростью. Каждая точка вращающегося тела описывает окружность и движется со скоростью

$$v = \omega R,$$

где R — радиус окружности, а ω — угловая скорость. (Чтобы подчеркнуть разницу между скоростью и угловой скоростью, первую часто называют *линейной*.) Если вращение равномерное, то ускорение этой точки направлено к центру окружности и равно

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

Оно называется *центростремительным*. Если вращение неравномерное, то ускорение состоит из двух компонент: из ускорения

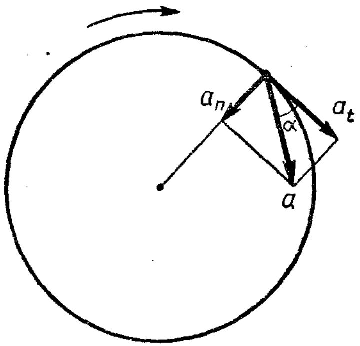


Рис. 8

$$a_n = \omega^2 R,$$

направленного к центру, и ускорения

$$a_t = \varepsilon R,$$

направленного по касательной (ε— угловое ускорение). Складываясь по правилу параллелограмма, они дают полное ускорение (рис. 8)

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Ускорение a_n называется *нормальным* (и поэтому снабжается индексом n) или *центростремительным*. Ускорение a_t называется *касательным*. (Его также называют *тангенциальным*, поэтому оно снабжается индексом t.)

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости точки, движущейся по окружности, *по направлению*. Касательное же ускорение характеризует изменение скорости *по величине*. (Поэтому оно имеется только при неравномерном вращении.) Если вращение равнопеременное, то

$$a_t = \frac{v - v_0}{t},$$

где t — время, за которое скорость изменяется от v_0 до v.

Если вращение равнопеременное, то

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{7}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{8}$$

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t, \tag{9}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi, \tag{10}$$

где ω_0 — начальная угловая скорость, а φ — угол поворота. (Эти формулы аналогичны соответствующим формулам для равнопеременного движения по прямой.)

В СИ угол измеряется в *радианах*, угловая скорость — в *рад/сек* ($сек^{-1}$) и угловое ускорение — в *рад/сек*^{2} ($сек^{-2}$).

44. Трехлопастный вентилятор вращается со скоростью 2000 *об/мин*. Если установить его в комнате, освещаемой лампой дневного света, то скорость его вращения будет казаться иной. Какой?

45. Какое ускорение получают точки земного экватора за счет вращения Земли? Во сколько раз должна была бы увеличиться угловая скорость Земли, чтобы это ускорение стало равным g?

46. Тело начинает вращаться и делает за 2 *мин* 3600 оборотов. Найти угловое ускорение тела, считая его постоянным.

47. Маховик получил начальную угловую скорость $\omega_0 = 2\pi$ $сек^{-1}$. Сделав 10 оборотов, он вследствие трения в подшипниках остановился. Найти угловое ускорение маховика, считая его постоянным.

48. Шестерня, имеющая 60 зубьев, вращается вокруг оси и приводит во вращение шестерню, имеющую 30 зубьев и вращающуюся вокруг другой оси. Первая шестерня, вращаясь с угловым ускорением 0,5$сек^{-2}$, имеет в данный момент угловую скорость 3 $сек^{-1}$. Каковы в этот момент угловая скорость и угловое ускорение второй шестерни?

49. Динамо-машина приводится во вращение от паровой машины с помощью ременной передачи. Шкив паровой машины имеет радиус $R = 75$ *см*, а шкив динамо-машины — радиус $r = 30$ *см*. Паровая машина начинает движение из состояния покоя и вращается с угловым ускорением 0,4 π $сек^{-2}$. Через сколько времени динамо-машина будет вращаться со скоростью 300 *об/мин*?

50. Маховое колесо радиуса $R = 1$ *м* начинает движение из состояния покоя и вращается равноускоренно. Через $t = 10$ *сек* точка, лежащая на его ободе, обладает скоростью $v = 100$ *м/сек*. Найти скорость, а также нормальное, касательное и полное ускорение этой точки в момент $t = 15$ *сек*.

51. Диск радиуса $R = 20$ *см* начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ $сек^{-2}$. Через сколько времени точка, лежащая на его краю, будет иметь ускорение 75 *см/сек*^{2}?

52. Тело начинает движение из состояния покоя и вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}04$ $сек^{-2}$. Через сколько времени точка, принадлежащая этому телу, будет иметь ускорение, направленное под углом 45° к ее скорости?

53. Диск начинает движение без начальной скорости и вращается равномерно ускоренно. Каким будет угол между вектором скорости и вектором ускорения произвольной точки диска, когда он сделает один оборот?

54. Груз P начинает опускаться с постоянным ускорением $a = 2$ *м/сек*^{2} и приводит в движение ступенчатый шкив с радиусами $r = 0{,}25$ *м* и $R = 0{,}5$ *м* (рис. 9). Какое ускорение будет иметь точка M через 0,5 *сек* после начала движения?

2. Мгновенный центр вращения

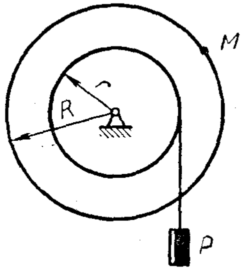


Рис. 9

Пусть диск катится по прямолинейному участку пути (рис. 10). Поскольку окружность можно рассматривать как правильный многоугольник с большим числом сторон, то круг, изображенный на рис. 10, можно мысленно заменить многоугольником (рис. 11). Но движение последнего состоит из ряда небольших поворотов: сначала вокруг точки C, а затем — вокруг точек C', C'' и т. д. Поэтому движение диска тоже можно рассматривать как последовательность очень малых (бесконечно малых) поворотов вокруг точек C, C', C'' и т. д. Таким образом, в каждый момент времени диск вращается вокруг своей нижней точки. Точка C называется *мгновенным центром вращения* диска. (Разумеется, она не является центром вращения в буквальном смысле, ибо ее положение все время меняется.)

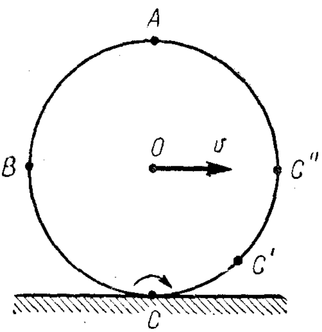


Рис. 10

Введение мгновенного центра вращения позволяет легко решать некоторые задачи. Например, зная, что центр диска имеет скорость v, можно найти скорость точки A (рис. 10). Действительно, так как диск вращается вокруг мгновенного центра C (это вращение показано дуговой стрелкой), то радиус вращения точки A равен AC, а радиус вращения точки O равен OC. Но так как $AC = 2\,OC$, то

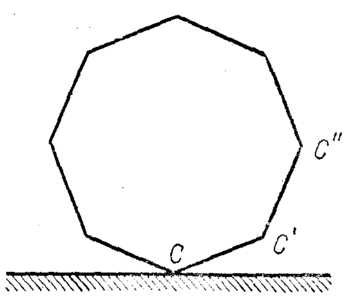


Рис. 11

$$v_A = 2v_O = 2v.$$

Столь же легко можно найти скорость любой точки этого диска.

Замечание. Более строгое рассмотрение показывает, что представление о вращении диска вокруг точки C допустимо лишь при вычислении *скоростей*, но не *ускорений*. Действительно, если вычислять таким путем ускорение точки O, то можно прийти к выводу, что оно равно v^2/OC и направлено от O к C, что, конечно, неверно.

55. Диск катится со скоростью v (рис. 10). Какова скорость точки B? Как она направлена?

56. Трамвай движется со скоростью v. Радиус трамвайного колеса равен r, а радиус реборды равен R (рис. 12). С какой скоростью и в каком направлении движется в данный момент нижняя точка реборды?

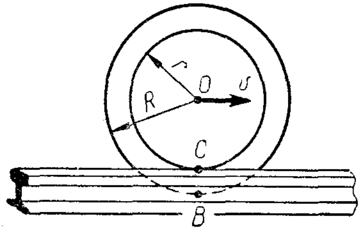


Рис. 12

57. Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2{,}5$ *сек*$^{-1}$, приводит в движение колесо радиуса $r = 5$ *см*, катящееся по неподвижному колесу радиуса $R = 15$ *см* (рис. 13). Найти скорость точки B.

58. Кривошип OA, вращаясь вокруг оси O, приводит в движение колесо *1* радиуса $R = 20$ *см*, катящееся по внутренней поверхности неподвижного круга *2* (рис. 14). Колесо *1*, соприкасаясь с колесом *3*

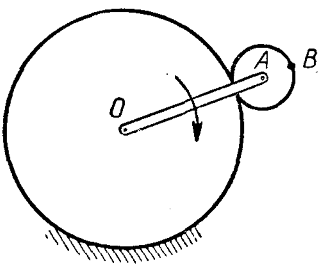


Рис. 13

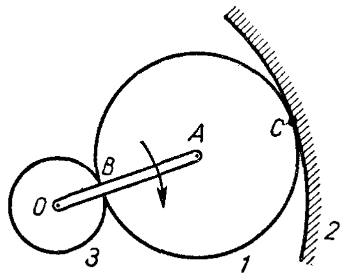


Рис. 14

радиуса $r = 10$ *см*, заставляет его вращаться вокруг оси O. (Колесо *3* свободно надето на ось O и не связано с кривошипом OA.) Во сколько раз угловая скорость колеса *3* больше угловой скорости кривошипа OA?

59. Две параллельные рейки движутся со скоростями $v_1 = 6$ *м/сек* и $v_2 = 4$ *м/сек* (рис. 15). Между рейками зажат диск, ка-

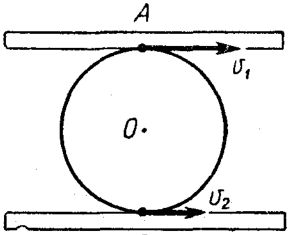


Рис. 15

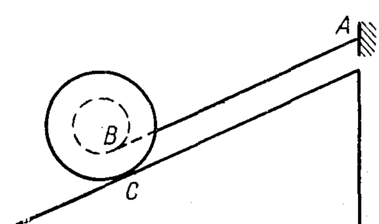


Рис. 16

тящийся по рейкам без скольжения. Какова скорость его центра?

60. Горизонтальную платформу перемещают с помощью круглых катков. На сколько переместится каждый каток, когда платформа передвинется на 10 *см*?

61. Будет ли скатываться с наклонной плоскости катушка, прикрепленная к стене нитью, как показано на рис. 16?

§ 4. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

1. Сложение скоростей

Когда говорят о движении той или иной точки, то имеют в виду ее движение по отношению к некоторому телу, или, что то же самое, по отношению к некоторой системе отсчета. Поэтому, говоря о скорости точки, мы имеем в виду не скорость вообще, а скорость *относительно некоторой системы отсчета*. (Часто приходится слышать выражение «скорость точки A относительно точки B». Это выражение не имеет смысла: можно говорить о скорости точки A относительно тела B, а не точки B.)

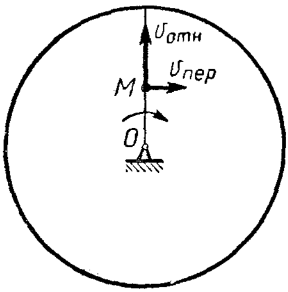


Рис. 17

Пусть имеются две системы отсчета: неподвижная система S и движущаяся система S'. Пусть, далее, имеется точка M, движущаяся относительно системы S и в то же время относительно системы S'. Движение этой точки по отношению к неподвижной системе S называют *абсолютным*, а по отношению к движущейся системе S' — *относительным*. Аналогично скорость точки M по отношению к неподвижной системе S называют *абсолютной*, а по отношению к движущейся системе S' — *относительной*. Кроме того, вводятся еще два понятия: *переносное движение* и *переносная скорость*. Под переносным движением понимают движение системы S' относительно неподвижной системы S, а под переносной скоростью — скорость того «места» в движущейся системе S', где находится в данный момент точка M. Пусть, например, точка M движется по диаметру вращающегося диска (рис. 17). В этом случае движущейся системой является диск, а переносным движением — вращение этого диска вокруг точки O. Переносная скорость точки M будет перпендикулярна к OM (ибо так направлена скорость того места на диске, где находится в данный момент точка M).

Абсолютная, относительная и переносная скорости связаны соотношением

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \tag{11}$$

где $\vec{v}_{абс}$, $\vec{v}_{отн}$, $\vec{v}_{пер}$ — векторы этих скоростей. Таким образом, абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей.

Следует подчеркнуть, что символ $\vec{v}_{пер}$ в равенстве (11) обозначает не скорость движущейся системы отсчета, а скорость того места в этой системе, где в данный момент находится рассматриваемая точка. Например, в случае, изображенном на рис. 17, переносная скорость точки M есть не скорость вращающегося диска (это понятие вообще не имеет смысла), а скорость той точки на этом диске, через которую проходит в данный момент точка M.

Если движущаяся система перемещается поступательно, то каждая ее точка имеет одну и ту же скорость. В этом случае переносная скорость есть скорость движущейся системы.

Из равенства (11) следует, что если тела *1* и *2* движутся поступательно со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то скорость первого тела относительно второго равна $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, а скорость второго тела относительно первого равна $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

$V_{отн}$

62. Точка M (рис. 17) движется по диску со скоростью 30 *см/сек* (относительно диска). Диск вращается с угловой скоростью 4 $сек^{-1}$, расстояние OM равно 10 *см* (в данный момент). Найти абсолютную скорость точки M.

63. Автомобили A и B движутся по взаимно перпендикулярным дорогам: первый — на север со скоростью 60 *км/ч*, а второй — на восток со скоростью 80 *км/ч*. Какова скорость первого автомобиля относительно второго?

64. Платформа движется со скоростью $v = 30$ *м/сек*. В момент, когда она занимает положение, показанное на рис. 18, с нее производится выстрел по неподвижной цели A. Зная, что скорость пули относительно платформы равна $u = 80$ *м/сек*, найти направление, в котором должен быть произведен выстрел.

65. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси со скоростью $\omega = 3$ $сек^{-1}$ (рис. 19). Шар A катится в направлении AO со скоростью 7 *м/сек*. Расстояние AO равно 8 *м* (в данный момент). Найти скорость шара относительно платформы.

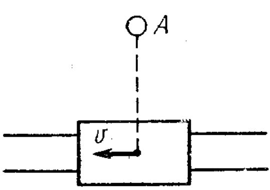


Рис. 18

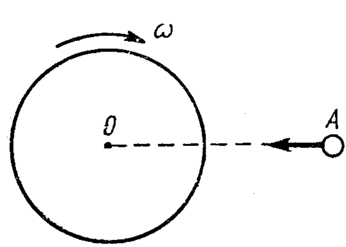


Рис. 19

66. Над экватором планеты движется спутник в сторону ее вращения. Скорость спутника $v_1 = 6$ *км/сек*, а скорость точек экватора $v_2 = 1$ *км/сек*. Найти скорость спутника относительно планеты, зная, что радиус планеты равен $R_1 = 1000$ *км*, а радиус орбиты спутника равен $R_2 = 2000$ *км*.

67. Вагон A движется по закруглению радиусом $OA = 0{,}5$ *км*, а вагон B — прямолинейно (рис. 20). Расстояние AB равно 0,2 *км*, а скорость каждого вагона равна 60 *км/ч*. Найти скорость вагона B относительно вагона A.

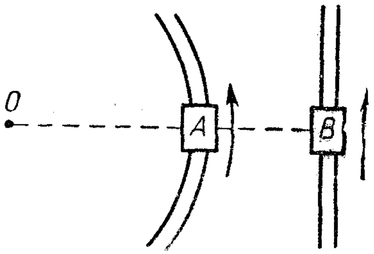


Рис. 20

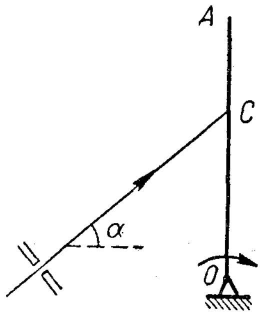


Рис. 21

68. Луч света падает на вращающийся вертикальный экран OA, образуя на нем зайчик C (рис. 21). Угловая скорость вращения экрана равна ω, а расстояние OC равно a (в данный момент); угол, образуемый лучом с горизонтом, равен α. С какой скоростью скользит зайчик по экрану?

2. Сложение ускорений

Если движущаяся система отсчета перемещается поступательно, то

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}, \tag{12}$$

где $\vec{a}_{\text{отн}}$ — относительное ускорение, а $\vec{a}_{\text{пер}}$ — переносное ускорение (ускорение движущейся системы отсчета). Если движущаяся система перемещается не поступательно, например вращается, то формула (12) неверна (см. задачу 73).

(В случае непоступательного перемещения движущейся системы существует другое правило сложения ускорений, но оно выходит за рамки курса элементарной физики.)

69. В вагоне равномерно и прямолинейно движущегося поезда падает яблоко. Каково его ускорение относительно вагона?

70. Решить предыдущую задачу в случае, когда вагон движется прямолинейно с ускорением a.

71. Автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 20$ *м/сек*. Каково ускорение верхней точки его колеса? Радиус колеса равен 0,25 *м*.

72. Автомобиль трогается с места и движется с постоянным ускорением 1 *м/сек*². Каково ускорение верхней точки его колеса в начальный момент движения?

73. Круглая горизонтальная платформа вращается с постоянной угловой скоростью ω. По краю платформы идет человек в направлении, противоположном ее вращению. Угловая скорость человека относительно платформы постоянна и равна ω. Доказать, что абсолютное ускорение человека не равно геометрической сумме его относительного и переносного ускорений.

§ 5. ДИНАМИКА ТОЧКИ

Связь между силой и ускорением выражается равенством

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{13}$$

где $\vec{F}$ — геометрическая сумма всех приложенных к точке сил, и $\vec{a}$ — ускорение этой точки. Равенство (13) является векторным и выражает два факта: во-первых, что $F = ma$, и, во-вторых, что векторы $\vec{F}$ и $\vec{a}$ имеют одинаковое направление.

Векторное равенство (13) эквивалентно двум скалярным:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= ma_x, \\ F_y &= ma_y, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где F_x и a_x — проекции векторов $\vec{F}$ и $\vec{a}$ на ось x, а F_y и a_y — проекции тех же векторов на ось y.

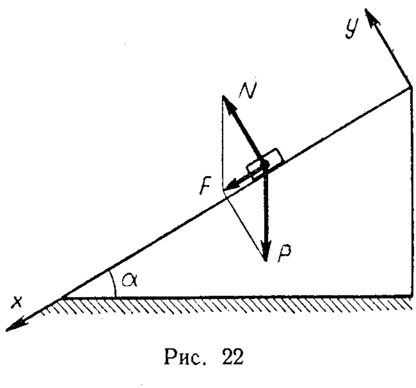


Рис. 22

При решении задач иногда удобно пользоваться векторным равенством (13), а иногда — скалярными равенствами (14). Оси x, y можно при этом проводить произвольно. (В некоторых случаях достаточно проецировать лишь на одну ось.) Пусть, например, брусок скользит по гладкой наклонной плоскости (рис. 22). В этом случае на него действуют две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и реакция $\vec{N}$. Так как ускорение бруска направлено вдоль плоскости, то согласно закону (13) равнодействующая $\vec{F}$ этих сил должна быть направлена так же. Далее, из параллелограмма сил находим:

$$N = P\cos\alpha, \qquad F = P\sin\alpha,$$

откуда

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha.$$

Таким образом, мы нашли реакцию N и ускорение a, исходя из векторного равенства (13). Однако эту задачу можно решить и исходя из скалярных равенств (14). В этом случае получим:

$$P_x + N_x = ma_x,$$
$$P_y + N_y = ma_y,$$

$$P_x = P\sin\alpha, \quad N_x = 0, \quad a_x = a,$$
$$P_y = -P\cos\alpha, \quad N_y = N, \quad a_y = 0,$$

$$P\sin\alpha = ma,$$
$$-P\cos\alpha + N = 0,$$

откуда

$$N = P\cos\alpha, \quad a = g\sin\alpha.$$

(Оси x, y можно было бы провести и иначе. Тогда получились бы другие уравнения, приводящие к тем же ответам.)

Если рассматривается движение системы, состоящей из двух или нескольких тел, то закон $\vec{F} = m\vec{a}$ надо применять к каждому из этих тел (см., например, задачи 85, 87, 95).

В некоторых случаях в состав механической системы входят тела, масса которых очень мала, и ее считают равной нулю. Следует помнить, что силы, действующие на каждое такое тело, нужно считать уравновешенными (см. задачи 87, 96, 97).

1. Прямолинейное движение точки

74. Автомобиль, все колеса которого ведущие, трогается с места. Зная, что коэффициент трения между покрышками колес и дорогой равен 0,8, найти максимально возможное ускорение автомобиля.

75. По неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скользит вниз брусок. Зная, что коэффициент трения между бруском и плоскостью равен k, а масса бруска равна m, найти ускорение бруска и реакцию плоскости.

76. Лифт поднимается с ускорением a. На полу лифта лежит кирпич массой m. Какова сила давления кирпича на пол лифта?

77. Лифт поднимается сначала равномерно, а затем равномерно замедленно. Каким должно быть замедление, чтобы шар, лежащий на полу лифта, подпрыгнул?

78. Шарик массой m прикреплен двумя нитями к доске (рис. 23). Каким будет натяжение каждой нити, если доска станет двигаться вверх с ускорением a?

79. На гладкой наклонной плоскости, движущейся вправо с ускорением a, лежит брусок (рис. 24). Каким должно быть это ускорение, чтобы брусок не скользил по плоскости?

80. В вагоне, движущемся прямолинейно с ускорением a, висит математический маятник. На какой угол отклоняется маятник от вертикали?

81. Брусок A, приводимый в движение нитью AB (рис. 25), скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Масса бруска равна m, угол наклона нити равен α, ускорение точки B равно a. Найти натяжение нити и давление бруска на плоскость.

82. Решить предыдущую задачу, считая, что между бруском и плоскостью имеется трение. Коэффициент трения равен k.

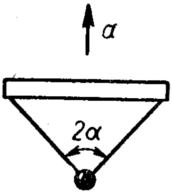


Рис. 23

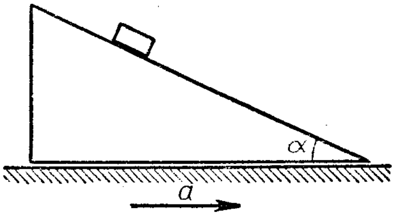


Рис. 24

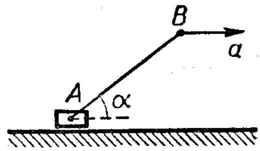


Рис. 25

83. Наклонная плоскость движется вправо с ускорением a (рис. 26). На плоскости лежит брусок массой m, прикрепленный к плоскости нитью. Найти натяжение нити и силу давления бруска на плоскость.

84. На гладкой наклонной плоскости, движущейся вправо с ускорением a, лежит брусок массой m (рис. 24). Найти ускорение бруска относительно плоскости и давление бруска на плоскость.

85. Найти ускорение грузов, изображенных на рис. 27, и натяжение связывающей их нити. (Плоскость, по которой движутся грузы, гладкая.)

86. Грузы, показанные на рис. 27, движутся по гладкой плоскости. Когда сила $F = 100$ *н* была приложена к правому грузу, натяжение нити было равно 30 *н*. Каким будет натяжение нити, если приложить эту силу к левому грузу? (Массы грузов не даны.)

87. С каким ускорением движутся грузы, изображенные на рис. 28? Каково натяжение нити, связывающей эти грузы? Блок и нить считать не имеющими массы (невесомыми).

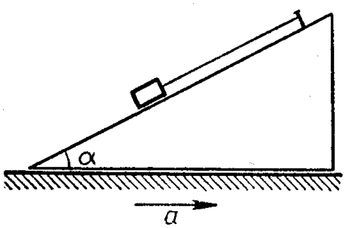


Рис. 26

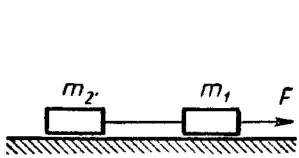


Рис. 27

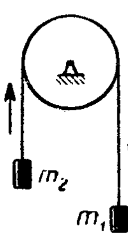


Рис. 28

88. Решить предыдущую задачу в случае, когда блок укреплен в лифте, поднимающемся с ускорением w.

89. В системе, показанной на рис. 29, масса левого груза равна m, масса блока равна M, а масса правого груза в сотни раз больше, чем m и M. Каково натяжение левой части нити?

90. Два груза связаны нитью, как показано на рис. 30. Каким будет натяжение этой нити, если левый груз будет весить 10 *н*, а правый — 15 *н*? (Блоки считать невесомыми.)

91. На одном конце веревки, переброшенной через невесомый блок, находится груз массой m, а на другом — человек массой $2\,m$ (рис. 31). Человек поднимается вверх с ускорением $a_{\text{отн}} = g$ относи-

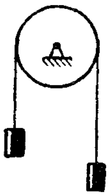


Рис. 29

Рис. 30

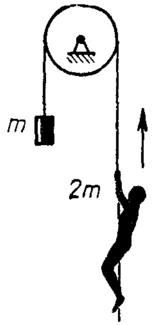


Рис. 31

тельно веревки. Каково его ускорение относительно земли? (Блок и веревку считать невесомыми.)

92. Грузы, изображенные на рис. 32, соединены невесомой нитью, переброшенной через невесомый блок. На верхний груз действует сила тяжести $P = 100$ *н*. Какая сила тяжести должна действовать на нижний груз, чтобы сила, движущая верхний груз, была равна 90 *н*? (Трение отсутствует.)

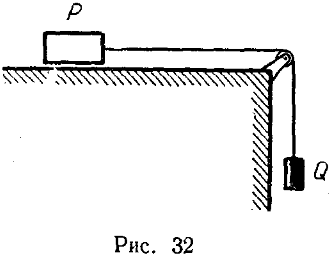


Рис. 32

93. Решить предыдущую задачу в случае, когда между грузом и горизонтальной плоскостью имеется трение. Коэффициент трения равен 0,2.

94. Установка, изображенная на рис. 32, движется вверх с ускорением a. Трения нет. Каково натяжение нити?

95. Груз P массой m приводит в движение груз Q массой M с помощью устройства, показанного на рис. 33. Плоскость, по которой скользит груз P, образует с горизонтом угол α. Блок и нить невесомы, трения нет. Найти ускорение грузов, натяжение нити и давления грузов на опорные плоскости.

96. Невесомый ступенчатый блок состоит из шкивов радиусами r и R (рис. 34). На меньший шкив намотана нить, к которой приложена горизонтальная сила, а на больший — нить, несущая груз массой m. С каким ускорением будет подниматься груз?

97. Невесомый ступенчатый блок состоит из шкивов радиусами r и R (рис. 35). На больший шкив намотана нить с грузом m_1, а на

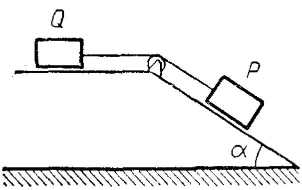


Рис. 33

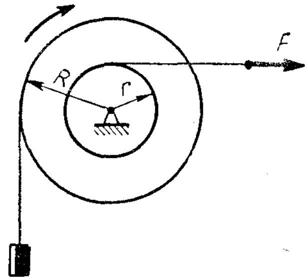


Рис. 34

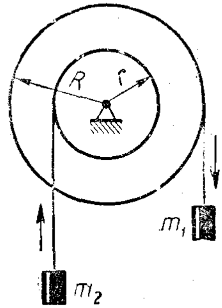


Рис. 35

меньший — нить с грузом m_2. Найти ускорение каждого груза и натяжение каждой нити.

98. Шестерня *1* под действием вращающего момента M приводит в движение шестерню *2* (рис. 36). Шестерня *2* жестко связана

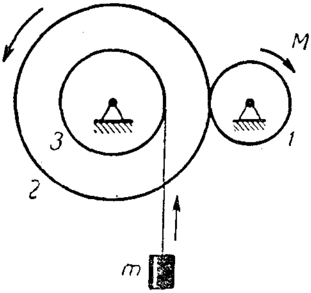


Рис. 36

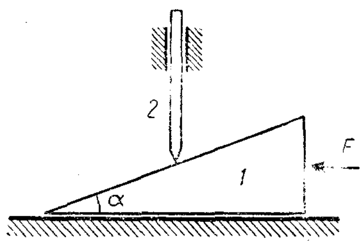


Рис. 37

со шкивом *3*, на который намотана нить, несущая груз m. Шестерни, шкив и нить невесомы; трения нет. Найти ускорение груза, зная, что радиусы шестерен равны R_1 и R_2, а радиус шкива равен r.

99. Сила F приводит в движение клин *1* и штифт *2* (рис. 37). Угол наклона клина равен α, масса клина равна m, масса штифта тоже равна m; трение отсутствует. Найти ускорение клина и силу взаимодействия клина и штифта.

2. Криволинейное движение точки

100. Самолет массой m совершает горизонтальный полет вдоль экватора со скоростью 1 *км/сек*. Какова подъемная сила его крыльев?

101. Вообразим, что Земля начала вращаться настолько быстро, что тела, находящиеся на экваторе, стали невесомы. Какой была бы в этом случае продолжительность суток?

102. Шар массой 1 *кг* был брошен под некоторым углом к горизонту. В момент, когда он достиг высшей точки траектории, его ускорение равнялось 12,5 *м/сек*^{2}. Какая сила сопротивления воздуха действововала на него в этот момент?

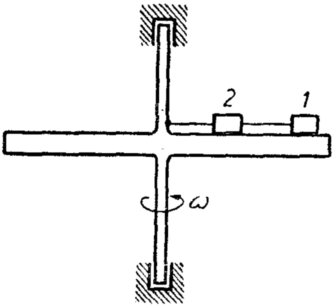


Рис. 38

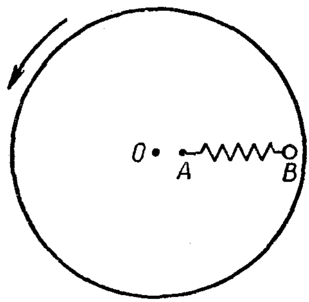


Рис. 39

103. Гладкий горизонтальный диск вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 38). На поверхности диска находятся грузы *1* и *2*, удерживаемые двумя нитями. Массы грузов равны m_1 и m_2, а радиусы их вращения — R_1 и R_2. Найти натяжения нитей.

104. Горизонтальный диск вращается вокруг вертикальной оси (рис. 39; вид сверху). Пружина AB одним концом прикреплена к диску, а другим — к шару B, лежащему на поверхности диска. Масса шара $m = 0{,}1$ *кг*, угловая скорость диска $\omega = 50$ *сек*$^{-1}$, расстояние OA равно 20 *см*, жесткость пружины $c = 1500$ *н/м*, а ее длина в недеформированном состоянии $l = 30$ *см*. Какую длину будет иметь пружина при вращении диска?

105. Математический маятник имеет массу m и длину l. В момент, когда он образует угол α с вертикалью, его скорость равна v. Каково в этот момент натяжение нити маятника?

106. Решить предыдущую задачу, считая, что маятник находится в вагоне, который движется прямолинейно с ускорением a. (v — скорость маятника относительно вагона.)

107. Камень A соскальзывает с полусферы (рис. 40). В момент, когда показанный на чертеже угол равен α, скорость камня равна v, Масса камня m, а коэффициент трения камня о полусферу k. Найти давление камня на поверхность полусферы.

108. На рис. 41 изображен так называемый конический маятник, состоящий из шарика, прикрепленного к нити и описывающего окружность в горизонтальной плоскости. Масса шарика m, длина

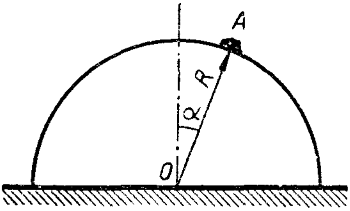


Рис. 40

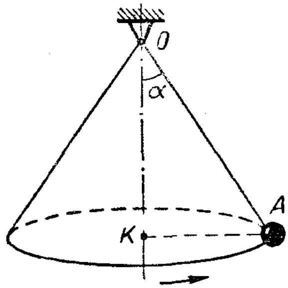


Рис. 41

нити l, угол отклонения нити от вертикали α. Найти скорость шарика и натяжение нити.

109. Конический маятник имеет длину $l = 1$ *м*. Может ли его период равняться 1 *сек*? Может ли он быть равен 3 *сек*?

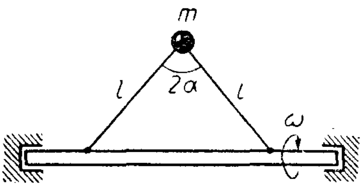


Рис. 42

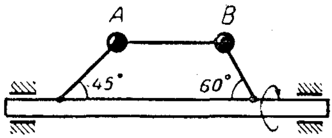


Рис. 43

110. Конический маятник имеет высоту $OK = h$ (рис. 41). Каков его период?

111. Горизонтальный вал вращается с угловой скоростью ω (рис. 42). Шарик массы m прикреплен к валу с помощью двух нитей длиной l. Найти натяжение нитей, пренебрегая силой тяжести шарика (но не пренебрегая его массой).

112. Шарики A и B прикреплены к вращающемуся горизонтальному валу с помощью трех нитей (рис. 43). Нить AB параллельна оси вала, углы, показанные на чертеже, равны 45° и 60°, масса шарика A равна m. Какова масса шарика B? (Силой тяжести шариков пренебречь.)

113. Тонкий стержень AB лежит в подшипниках A и B (рис. 44). Шарик P, прикрепленный к стержню нитью CP, совершает колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа. Масса шарика равна m, расстояние $AC = a$, расстояние $CB = b$, длина

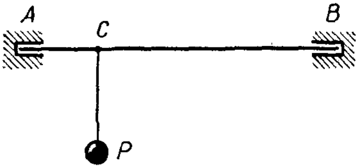


Рис. 44

$CP = l$. В момент, когда шарик проходит через нижнее положение, его скорость равна v. Каковы в этот момент реакции подшипников? (Массу стержня и нити считать равной нулю.)

114. В нижней части неподвижного вертикального обруча радиусом 0,5 *м* лежал брусок (рис. 45). После того как ему сообщили горизонтальную скорость, он начал подниматься по обручу, достиг верхней точки и стал двигаться дальше. Могла ли его скорость в верхней точке равняться 2 *м/сек*?

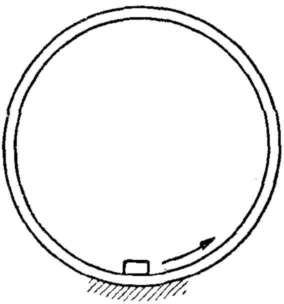


Рис. 45

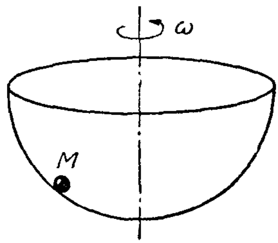


Рис. 46

115. Полусферическая чаша радиусом R вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 46). В чаше лежит шарик M, вращающийся вместе с нею. В каком месте чаши он находится?

116. Конус с углом раствора 2α вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 47). В конусе находится шарик массой m, прикрепленный с помощью нити; радиус вращения шарика равен r. Найти натяжение нити и давление шарика на поверхность конуса.

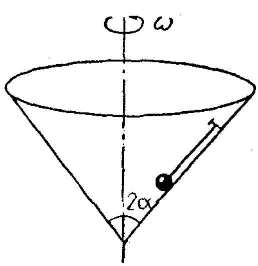


Рис. 47

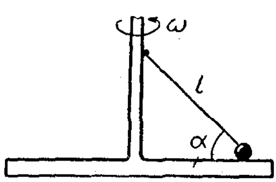


Рис. 48

117. Круглая платформа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 48). На платформе находится шарик массой m, прикрепленный к оси платформы нитью. Угол наклона нити равен α, длина нити равна l. Найти натяжение нити и давление шарика на платформу.

118. Горизонтальная платформа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 49). На платформе находится стержень AC, шарнирно укрепленный в точке A и удерживаемый нитью BO. На конце стержня укреплен шарик C массой m.

Расстояние $AB = 0{,}4$ *м*, расстояние $BC = 0{,}4$ *м*, длина $BO = 0{,}3$ *м*. Найти натяжение нити, считая массу стержня равной нулю.

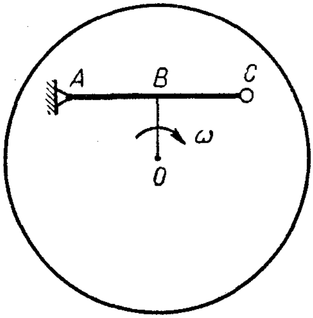


Рис. 49

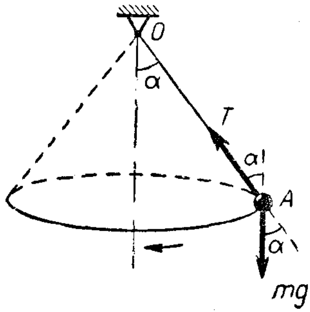


Рис. 50

119. Учащийся решал задачу о коническом маятнике (рис. 50). Он считал, что так как шарик A не движется в направлении OA, то равнодействующая всех сил, действующих в этом направлении, равна нулю. Поэтому

$$T - mg\cos\alpha = 0$$

и

$$T = mg\cos\alpha.$$

Другой из учащихся считал, что поскольку шарик A не движется в направлении вертикали, то равна нулю сумма всех сил, действующих в вертикальном направлении. Поэтому

$$T\cos\alpha - mg = 0$$

и

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Почему они пришли к разным результатам?

§ 6. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

Количеством движения (импульсом) материальной точки называется вектор $m\vec{v}$. Количеством движения системы называется геометрическая сумма количеств движения всех ее точек. Например, если система состоит из двух материальных точек (рис. 51), то ее количество движения будет изображаться вектором $\vec{OP}$, равным по величине

$$\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}.$$

Если все точки системы движутся вдоль одной прямой, то можно говорить о количестве движения в скалярном смысле. Оно равно алгебраической сумме количеств движения отдельных точек.

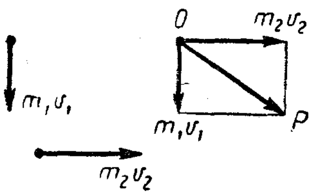


Рис. 51

Количество движения точки можно разложить на составляющие mv_x и mv_y, направленные вдоль осей x и y. Если поступить так с каждой точкой системы и затем суммировать все количества движения mv_x, то получится количество движения системы *в направлении оси* x. Аналогично вычисляется количество движения системы *в направлении оси* y.

Количество движения системы изменяется под действием внешних сил, внутренние же силы изменить количество движения системы не могут. Поэтому если на систему действуют только внутренние силы, то ее количество движения остается неизменным (по величине и направлению). В этом случае можно написать:

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const}.$$

Если на систему действуют внешние силы, ни одна из которых не имеет составляющей в направлении оси x, то количество движения системы в направлении этой оси остается неизменным. В этом случае будем иметь:

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2v_{2x} + \ldots + m_n v_{nx} = \text{const}.$$

Подобный случай встречается, например, тогда, когда единственными внешними силами, действующими на систему, являются силы тяжести и реакции гладкой горизонтальной плоскости (см. задачи 120, 121).

120. Человек массой m неподвижно стоит на тележке массой M. С какой скоростью начнет двигаться тележка, если человек побежит по ней с относительной скоростью $v_{\text{отн}}$? (Трение тележки о землю не учитывать.)

121. Из пушки, не имеющей противооткатного устройства, вылетает снаряд под углом α к горизонту. Скорость снаряда равна v, масса снаряда m, масса пушки M. Найти скорость пушки после выстрела. (Трение между колесами пушки и землей не учитывать, массой пороховых газов, вылетающих вслед за снарядом, пренебречь.)

122. Частицы *1* и *2* с массами m_1 и m_2 и скоростями v_1 и v_2 движутся, как показано на рис. 52. При столкновении частиц происходит неупругий удар, в результате которого частицы начинают двигаться вместе. Найти скорость частиц после удара.

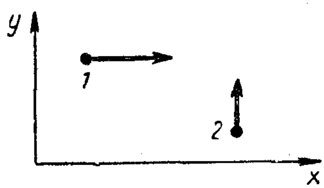


Рис. 52

123. Шары *1* и *2* движутся по гладкой горизонтальной плоскости вдоль одной прямой. Первый шар имеет массу $m_1 = 0{,}5$ *кг* и скорость $v_1 = 10$ *м/сек*, а второй — массу $m_2 = 1$ *кг* и скорость $v_2 = 5$ *м/сек*. После того как первый шар догоняет второй, происходит удар и скорость первого шара уменьшается до величины $u_1 = 8$ *м/сек*. Какова скорость второго шара после удара?

124. Частицы *1* и *2*, показанные на рис. 52, имеют одинаковую массу m и скорости v_1 и v_2. В результате удара первая частица останавливается. Какую скорость будет иметь после удара вторая частица?

125. Тележка с песком, имеющая массу M, движется по горизонтальным рельсам со скоростью v. Вертикально падающий камень массой m попадает в песок и движется вместе с тележкой. Найти скорость тележки после падения камня.

126. Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту, имея начальную скорость v_0. В некоторой точке траектории он разрывается на два осколка одинаковой массы, один из которых падает по вертикали, а другой начинает двигаться под углом β к горизонту. Какова скорость второго осколка после разрыва? (Сопротивление воздуха не учитывать.)

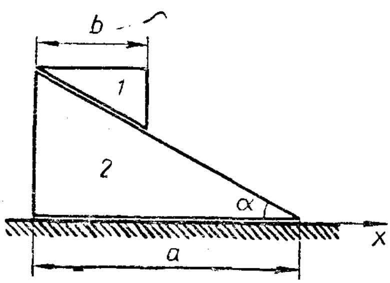


Рис. 53

127. Призма *1*, имеющая массу m, была положена на призму *2*, имеющую массу $3m$ (рис. 53). Верхняя призма начала скользить по нижней и в некоторый момент времени двигалась по ней со скоростью $v_{\text{отн}}$. Какую скорость имела в этот момент нижняя призма? (Призмы и горизонтальную плоскость считать гладкими.)

128. На гладкой горизонтальной плоскости стоит брусок массой M (рис. 54). К бруску привязана нить длиной l, на конце которой находится шарик массой m. В начальный момент нить была отклонена на некоторый угол и отпущена без начальной скорости. Найти скорость бруска в момент, когда нить проходит через вертикальное положение, зная, что ее угловая скорость в этот момент равна ω.

129. Пусть в предыдущей задаче нить имеет угловую скорость ω в момент, когда она образует с вертикалью угол α. Найти скорость бруска в этот момент.

130. Какое расстояние пройдет нижняя призма (см. рис. 53, задача 127) к моменту, когда верхняя призма коснется горизонтальной плоскости?

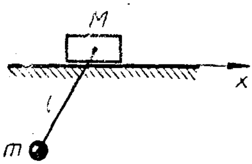


Рис. 54

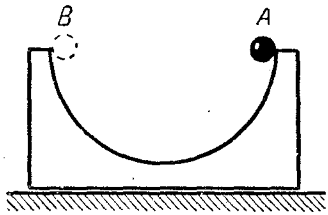


Рис. 55

131. Пусть между призмами *1* и *2* будет небольшое трение (а между призмой *2* и горизонтальной плоскостью трения не будет). Как это повлияет на ответ предыдущей задачи?

132. Сферическая чашка стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 55). По внутренней поверхности чашки скатывается шарик, начинающий движение из точки A (без начальной скорости). Масса чашки M, масса шарика m, радиус чашки R, радиус шарика r. На сколько переместится чашка, когда шарик придет в положение B?

133. На столе стоят работающие песочные часы. Сила тяжести, действующая на часы и песок, равна P, сила тяжести, действующая на песчинки, находящиеся в данный момент в воздухе, равна p. Какова сила давления часов на стол?

§ 7. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Работа, совершаемая постоянной силой F на прямолинейном перемещении s, равна

$$A = F s \cos\alpha. \qquad (17)$$

Она может быть как положительной, так и отрицательной.

Работа, совершаемая постоянным вращающим моментом, равна

$$A = M\varphi, \qquad (18)$$

где φ — угол поворота, измеряемый в радианах.

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (19)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий ее точек:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2}. \qquad (20)$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в поле силы тяжести, равна

$$W_p = mgh, \qquad (21)$$

где h — высота, на которой находится тело (точнее, высота его центра тяжести).

Потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины равна

$$W_p = \frac{c\delta^2}{2}, \qquad (22)$$

где c — жесткость пружины, а δ — ее деформация.

Полная механическая энергия тела или системы тел равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$W = T + W_p. \qquad (23)$$

Если на систему действуют только силы, для которых можно говорить о потенциальной энергии (например, сила тяжести или сила упругости), то

$$W = T + W_p = \text{const}, \qquad (24)$$

т. е. полная механическая энергия системы остается неизменной. Если же на систему действуют и какие-либо другие силы, то механическая энергия системы может изменяться. В этом случае

$$W - W_0 = A, \qquad (25)$$

где A — работа непотенциальных сил. Если $A > 0$, то механическая энергия системы увеличивается, а если $A < 0$, то механическая энергия уменьшается (например, в случае, когда на тела системы действуют силы трения).

Под мощностью понимается отношение

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}, \qquad (26)$$

где ΔA — работа, совершаемая за бесконечно малый промежуток времени Δt.

Если сила F приложена к движущемуся телу, то ее мощность равна

$$N = F\, v \cos\alpha, \qquad (27)$$

где v — скорость той точки, к которой приложена сила F, а α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$. Если $\alpha = 0$, то $N = F v$.

134. Брусок массой 5 *кг* проходит по шероховатой горизонтальной плоскости 0,5 *м* и останавливается. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен 0,2. Какую работу совершила сила трения?

135. Человек поднимается по лестнице. Какая сила его движет? Совершает ли она работу?

136. Может ли потенциальная энергия быть отрицательной?

137. Снаряд массой 6 *кг* проходит в стволе орудия 2 *м* и вылетает с горизонтальной скоростью 600 *м/сек*. Считая, что снаряд движется с постоянным ускорением, вычислить мощность, развиваемую орудием за время выстрела.

138. К грузу массой m приложена постоянная вертикальная сила, поднимающая его за время t на высоту h. Какую работу совершила сила за время подъема?

139. Тело брошено вверх с начальной скоростью v_0. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной? (Потенциальная энергия отсчитывается от уровня, с которого тело брошено.)

140. Шарик, висящий на нити, отклонили от вертикали на угол 60° и отпустили без начальной скорости (рис. 56). В момент, когда шарик достиг вертикального положения, он ударился о вертикальную стенку и потерял половину своей кинетической энергии. На какой угол он отклонится после удара?

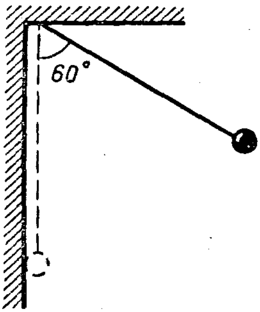


Рис. 56

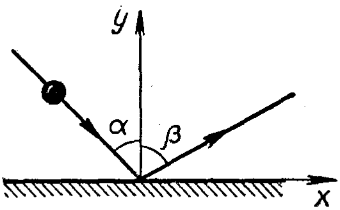


Рис. 57

141. При ударе шарика о идеально гладкую горизонтальную плоскость (рис. 57) теряется третья часть его кинетической энергии. Зная, что угол падения α равен 45°, найти угол отражения β.

142. Вертикально висящая недеформированная пружина имеет жесткость $c = 10$ *н/см*. К нижнему концу пружины подвесили груз весом 30 *н* и отпустили без начальной скорости. На сколько опустится груз? (Массу и вес пружины считать равными нулю.)

143. На гладкой горизонтальной плоскости лежали два шара, между которыми находилась сжатая пружина. Затем пружине дали возможность распрямиться, вследствие чего шары приобрели некоторые скорости. Вычислить их, зная, что массы шаров равны 1 *кг* и 2 *кг*, а энергия сжатой пружины равна 3 *дж*. (Массу пружины считать равной нулю.)

144. Два свинцовых шара поступательно движутся навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры. При столкновении шаров происходит неупругий удар, после которого шары движутся вместе. Найти количество тепла, выделившегося при ударе. Первый шар имел массу 1 *кг* и скорость 20 *м/сек*, а второй — массу 2 *кг* и скорость 4 *м/сек*.

145. Пуля пробивает ящик, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости. Масса пули m, масса ящика M, пуля подлетает к ящику со скоростью v, а вылетает из него со скоростью $v/2$. Сколько тепла выделилось при движении пули в ящике? (Начальную и конечную скорости пули считать горизонтальными.)

146. Пуля попадает в ящик с песком и застревает в нем (рис. 58). На сколько сожмется пружина жесткостью c, удерживающая ящик, если пуля имеет массу m и движется со скоростью v, а масса ящика с песком равна M?

147. Шарик массой m, летящий со скоростью v, ударяет в призму массой M и после удара движется вверх (рис. 59). Считая удар абсолютно упругим (т. е. не сопровождающимся потерей энергии), найти скорость шарика и призмы после удара.

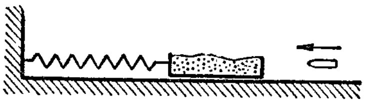


Рис. 58

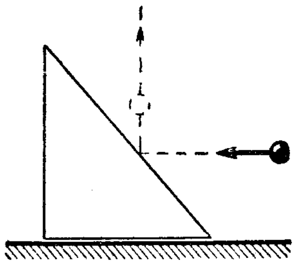


Рис. 59

148. Тележка массой M стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 60). На тележке укреплен математический маятник, имеющий массу m и длину l. В начальный момент тележка и маятник имели скорость, равную нулю, и нить маятника образовывала угол α с вертикалью. Найти скорость тележки в момент, когда маятник будет проходить через вертикальное положение. (Колеса тележки считать не имеющими массы.)

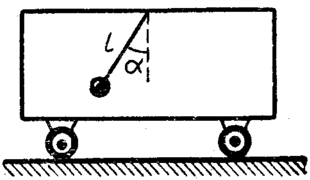


Рис. 60

149. На стержне нулевой массы укреплены два шарика (рис. 61). $OA = AB = l$, начальный угол отклонения стержня равен α, начальная угловая скорость стержня равна нулю. Найти угловую скорость стержня в момент, когда он проходит через вертикальное положение.

150. Через два гвоздя, находящиеся на одной горизонтали, переброшена нить, к концам которой прикреплены грузы массой m каждый (рис. 62). К середине нити подвешивают груз массой M и предоставляют ему падать без начальной скорости. Определить наибольшее расстояние, на которое опустится груз M, считая, что длина нити достаточно велика и $M < 2m$. Трение нити о гвозди не учитывать.

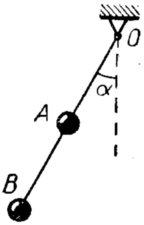


Рис. 61

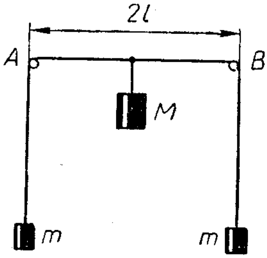


Рис. 62

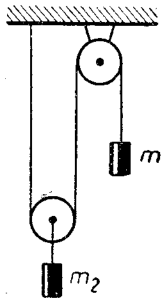


Рис. 63

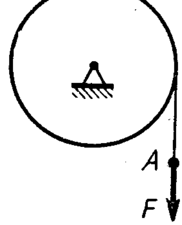


Рис. 64

151. Найти скорость грузов (см. рис. 28), считая, что каждый из грузов прошел расстояние s. (Начальная скорость грузов равна нулю, трение отсутствует, блок не имеет массы.)

152. Найти скорости грузов (см. рис. 35), считая, что правый груз прошел расстояние s. (Начальные скорости грузов равны нулю, трение отсутствует, блок не имеет массы.)

153. В конструкции, изображенной на рис. 63, груз m_1 опускается, а груз m_2 поднимается. Считая блоки не имеющими массы, найти скорость правого груза в момент, когда он прошел расстояние s. (Начальные скорости грузов равны нулю, трение отсутствует.)

154. Шестерня *1* под действием вращающего момента M приводит в движение шестерню *2* (см. рис. 36). Шестерня *2* жестко связана со шкивом *3*, на который намотана нить, несущая груз m. Шестерни и шкив невесомы; трения нет. Найти скорость груза в момент, когда он прошел расстояние s. Радиусы шестерен равны R_1 и R_2, радиус шкива равен r, начальная скорость груза равна нулю.

155. На однородный вал, способный вращаться вокруг горизонтальной оси, намотана нить, к концу которой приложена постоянная сила F (рис. 64). Когда точка приложения этой силы прошла путь 20 *см*, скорость вращения вала достигла 50 *об/мин*. Какой будет скорость вала, когда точка A пройдет еще 20 *см*? (Вращение вала начиналось из состояния покоя.)

156. Тонкий однородный обруч катится по плоскости (рис. 65). Масса обруча равна m, а скорость его центра равна v. Какова кинетическая энергия обруча?

157. На тонкий шкив, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотана нить, к концу которой подвешен груз (рис. 66). Масса груза равна m, масса шкива равна M, массой спиц можно пренебречь; движение системы начинается из состояния покоя. Какую скорость будет иметь груз после того, как пройдет расстояние s?

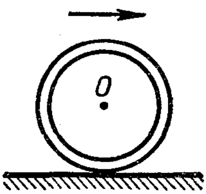


Рис. 65

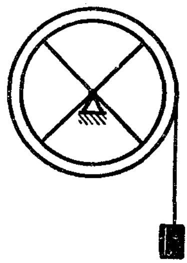


Рис. 66

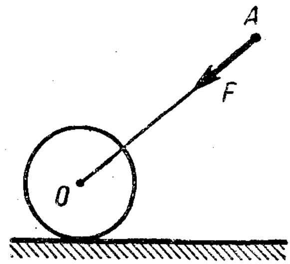


Рис. 67

158. Тонкий однородный обруч вкатывается вверх по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Какой должна быть начальная скорость его центра, чтобы он переместился по плоскости на расстояние l? (Обруч катится без скольжения.)

159. Цилиндрический каток диаметром 0,6 *м* и массой 300 *кг* приводится в движение человеком, который давит на рукоятку OA с постоянной силой F (рис. 67). Длина AO равна 1,5 *м*, высота точки A над горизонтом равна 1,2 *м*. Найти силу F, при которой человек, пройдя 2 *м*, сообщит оси катка скорость 0,8 *м/сек*. Массу катка считать сосредоточенной в его ободе.

Радиус инерции и момент инерции

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси (рис. 68). Так как разные его точки имеют различные скорости, то кинетическую энергию этого тела можно записать в виде

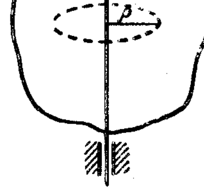


Рис. 68

$$T = \frac{m(\omega\rho)^2}{2}, \qquad (28)$$

где m — масса тела, ω — его угловая скорость и ρ — некоторое среднее расстояние точек этого тела от оси вращения. Расстояние ρ называется *радиусом инерции данного тела* относительно оси вращения.

Равенство (28) можно записать в виде

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{29}$$

где

$$I = m\rho^2. \tag{30}$$

Величина I называется *моментом инерции данного тела* (относительно данной оси вращения).

Радиусы и моменты инерции различных тел могут быть вычислены методами высшей математики. (В приводимых ниже задачах они задаются.)

В СИ радиус инерции измеряется в *м*, а момент инерции в *кгм*².

160. Однородное тонкое кольцо вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости. Каков радиус инерции этого кольца?

161. Круглый однородный диск массой m насажен на ось, проходящую через его центр перпендикулярно плоскости диска. Диск начинает вращаться из состояния покоя под действием постоянного вращающегося момента M. Какой будет его угловая скорость в момент, когда он повернется на угол φ? Радиус инерции диска равен $R/\sqrt{2}$.

162. Шестерня *2* приводится в движение шестерней *1*, к которой приложен вращающий момент M (рис. 69). Радиусы шестерен рав-

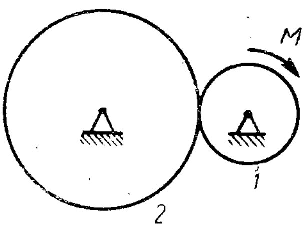


Рис. 69

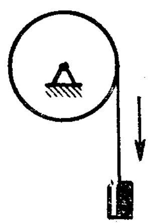


Рис. 70

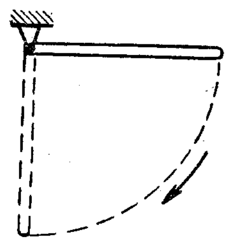


Рис. 71

ны R_1 и R_2; масса первой шестерни равна нулю, масса второй шестерни равна m, а ее радиус инерции равен ρ; движение системы начинается из состояния покоя. Найти угловую скорость шестерни *2* в момент, когда она повернулась на угол φ.

163. Однородный круглый диск приводится во вращение грузом массой m (рис. 70). Диск имеет массу M, радиус R и радиус инерции $R/\sqrt{2}$; движение начинается из состояния покоя. Найти скорость груза после того, как он прошел расстояние s.

164. Однородный стержень (рис. 71) отклонен от вертикали на 90° и начинает движение без начальной скорости. Какой будет его угловая скорость, когда он достигнет вертикали? Длина стержня равна l, а его радиус инерции равен $l/\sqrt{3}$.

165. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, равен $\frac{2}{5}mR^2$. Считая Землю однородной, вычислите кинетическую энергию, обусловленную ее суточным вращением. Сравните полученную величину с годичной выработкой электроэнергии во всем мире. (Масса Земли — $6 \cdot 10^{24}$ *кг*, мировая добыча электроэнергии — около $5 \cdot 10^{12}$ *квт · ч* в год.)

Вычисление ускорений

В некоторых случаях закон сохранения энергии позволяет вычислить ускорение. Пусть, например, нужно найти ускорение призмы, соскальзывающей с гладкой наклонной плоскости (рис. 72). Пользуясь законом сохранения энергии и считая, что движение начинается без начальной скорости, получим:

$$\frac{mv^2}{2} = mgs\sin\alpha, \quad v^2 = 2gs\sin\alpha,$$

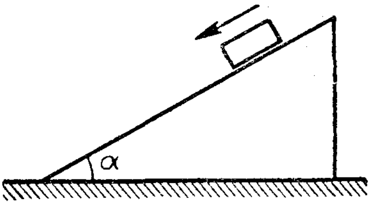


Рис. 72

где s — путь, пройденный призмой по наклонной плоскости. Но так как силы, действующие на призму, остаются неизменными, то призма движется с постоянным ускорением. Поэтому можно написать:

$$v^2 = 2as,$$

где a — искомое ускорение. Сравнивая последнее равенство с предыдущим, приходим к выводу, что

$$a = g\sin\alpha.$$

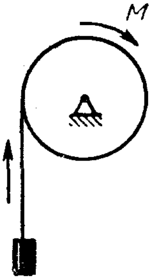


Рис. 73

Подобным способом можно вычислить ускорение и в ряде других случаев.

166. Вычислить ускорение грузов (см. рис. 28). (Масса блока равна нулю.)

167. Найти ускорения грузов (см. рис. 35), считая, что масса блока равна нулю.

168. Тонкий однородный обруч скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти ускорение центра обруча.

169. Найти ускорение груза, изображенного на рис. 73. Масса груза равна m, масса вала равна нулю, момент, вращающий вал, равен M, радиус вала равен R.

170. Решить предыдущую задачу, считая, что вал имеет массу m и радиус инерции ρ.

§ 8. СТАТИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1. Силы, приложенные в одной точке

Две силы, приложенные в одной точке, складываются по правилу параллелограмма. Если нужно сложить несколько таких сил, то можно либо применить несколько раз правило параллелограмма, либо воспользоваться более простым способом — способом силового многоугольника. Пусть, например, требуется сложить силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (рис. 74, слева). С этой целью выбираем произвольную точку O и откладываем от нее вектор $\vec{F}_1$ (рис. 74, справа). Затем

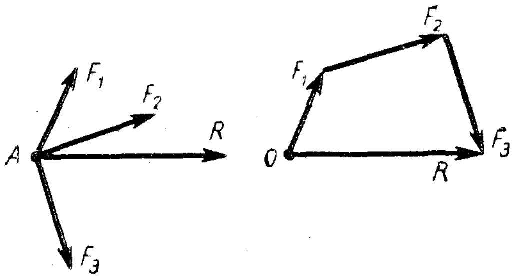


Рис. 74

из конца этого вектора проводим вектор $\vec{F}_2$, а из его конца — вектор $\vec{F}_3$. После этого соединяем начало первого вектора с концом последнего и получаем вектор $\vec{R}$ — вектор равнодействующей. Теперь этот вектор следует перенести в точку A, ибо равнодействующая рассматриваемых сил приложена в этой точке. Многоугольник $OF_1F_2F_3$ называется силовым.

Силы, приложенные в одной точке, можно складывать не только геометрически, но и аналитически. Это делается по формулам:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

где F_{1x}, ..., F_{nx}, F_{1y}, ..., F_{ny} — проекции на оси x и y сил $\vec{F}_1$, ..., $\vec{F}_n$, а R_x и R_y — проекции на оси x, y равнодействующей $\vec{R}$. (Сущность этого способа состоит в том, что каждую из сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ мы раскладываем на две составляющие, одна из которых направлена по оси x, а другая — по оси y; после этого складываем все составляющие, идущие вдоль оси x, а затем — все составляющие, идущие вдоль оси y.) Вычислив по формулам (31) проекции R_x, R_y (составляющие R_x, R_y), легко найти равнодействующую $\vec{R}$ (см. задачи 171, 172).

Аналитический способ сложения сил обычно проще геометрического.

Если силы, приложенные в одной точке, уравновешиваются, то $\vec{R} = 0$ и , следовательно,

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Равенства (32) называются *уравнениями равновесия* (для сил, приложенных в одной точке).

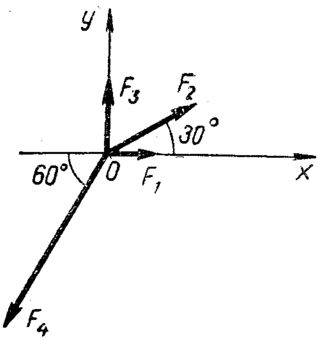


Рис. 75

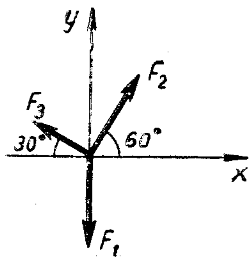


Рис. 76

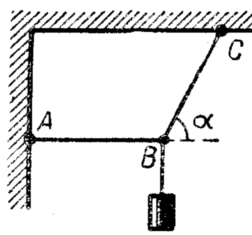


Рис. 77

171. Найти равнодействующую сил (рис. 75): $F_1 = 50$ *н*, $F_2 = 100$ *н*, $F_3 = 60$ *н*, $F_4 = 200$ *н*.

172. Найти равнодействующую сил (рис. 76): $F_1 = 100$ *н*, $F_2 = 50\sqrt{3}$ *н*, $F_3 = 50$ *н*.

173. Груз весом P удерживается с помощью нитей AB и BC (рис. 77). Зная угол α, найти натяжения этих нитей.

174. Стержень весом P удерживается с помощью нитей AB, BC, CD (рис. 78). Зная угол α, найти натяжения этих нитей.

175. Грузы P и Q висят, как показано на рис. 79. Зная углы α, β и вес P, найти вес Q.

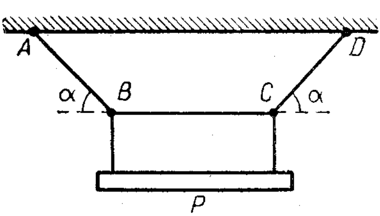


Рис. 78

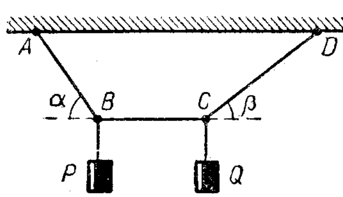


Рис. 79

2. Параллельные силы

Две параллельные силы складываются по правилу: равнодействующая параллельных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ равна $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ и делит расстояние между этими силами на части, обратно пропорциональные числам F_1, F_2. Однако это правило (а также его модификация для случая, когда силы направлены в противоположные стороны) сравнительно сложно. Поэтому параллельные силы лучше складывать по правилу моментов, которое состоит в следующем.

Пусть нужно сложить несколько параллельных сил, например силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (рис. 80). С этой целью приписываем каждой из сил некоторый знак, в зависимости от того, в какую сторону она направлена. Затем складываем эти силы алгебраически и находим тем самым величину и направление их равнодействующей. Например, если считать силы F_1 и F_2 положительными, а силу F_3 — отрицательной (можно поступить наоборот), получим:

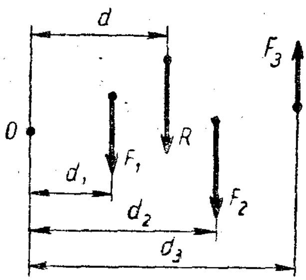


Рис. 80

$$R = F_1 + F_2 - F_3. \qquad (33)$$

Если найденная сумма будет положительной, то равнодействующая R направлена в положительную сторону, т. е. вниз, а если эта сумма окажется отрицательной, то равнодействующая направлена в отрицательную сторону, т. е. вверх.

Найдя величину и направление равнодействующей, переходим к отысканию ее линии действия. Это делается с помощью правила: *момент равнодействующей равен сумме моментов складываемых сил.* Чтобы применить это правило, выбираем в плоскости действия сил произвольную точку O, вычисляем алгебраическую сумму моментов всех сил относительно этой точки и приравниваем ее моменту равнодействующей R относительно той же точки. Например, если вращение по часовой стрелке считать положительным, то в случае, изображенном на рис. 80, получим:

$$F_1d_1 + F_2d_2 - F_3d_3 = Rd. \qquad (34)$$

Поскольку сила R была перед этим найдена, то написанное равенство позволяет вычислить плечо d, определяющее линию действия равнодействующей. (Точкой приложения равнодействующей можно считать любую точку на линии ее действия.) Если полученное число d окажется отрицательным, то это значит, что линия действия равнодействующей расположена по другую сторону от точки O.

Если сумма (33) окажется равной нулю, то рассматриваемые силы *не имеют равнодействующей*, а сводятся *к паре сил*. Момент этой пары равен сумме моментов данных сил относительно точки O. Если же сумма моментов тоже будет равна нулю, то рассматриваемые силы уравновешиваются. (Можно сказать, что они имеют равнодействующую, равную нулю.)

Различные случаи, которые могут представиться при сложении параллельных сил, рассмотрены в задачах 176—180.

176. Сложить силы (рис. 81): $F_1 = 10$ *н*, $F_2 = 20$ *н*, $F_3 = 30$ *н*, $F_4 = 40$ *н*; $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = a$.

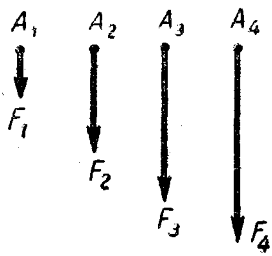


Рис. 81

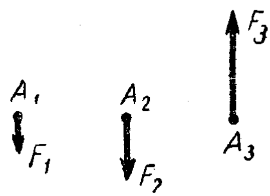


Рис. 82

177. Найти равнодействующую сил (рис. 82): $A_1A_2 = A_2A_3 = a$; $F_1 = 10$ *н*, $F_2 = 20$ *н*, $F_3 = 50$ *н*.

178. Решить предыдущую задачу, считая силу F_3 равной 25 *н*.

179. Решить задачу 177, считая силу F_3 равной 30 *н*.

180. Найти равнодействующую сил (рис. 83). $F_1 = 5$ *н*, $F_2 = 30$ *н*, $F_3 = 45$ *н*, $F_4 = 20$ *н*; $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = a$.

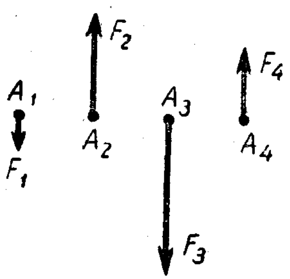


Рис. 83

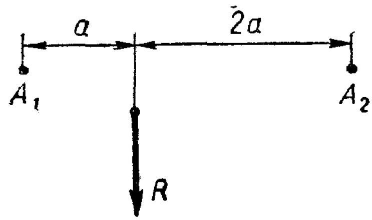


Рис. 84

181. Разложить силу $R = 30$ *н* на две параллельные силы, приложенные в точках A_1, A_2 (рис. 84).

182. Разложить силу $R = 50$ *н* на две параллельные силы, приложенные в точках A_1, A_2 (рис. 85).

183. Однородное тело, состоящее из цилиндра и полушара, стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 86). При каких значениях h это положение устойчиво? Центр тяжести полушара находится в точке C_1, расстояние OC_1 равно $\frac{3}{8}R$.

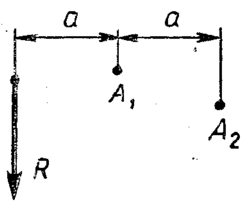


Рис. 85

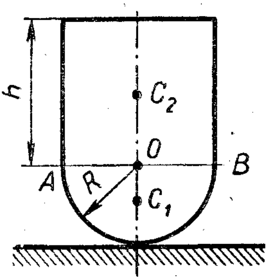


Рис. 86

184. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны, а расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 000 *км*. Где находится центр тяжести (точнее, центр масс) системы Земля—Луна?

3. Уравнения равновесия

Пусть на твердое тело действуют произвольные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, лежащие в одной плоскости. Для того чтобы система этих сил была уравновешенной, должны обращаться в нуль три следующие суммы:

1) сумма проекций всех сил на ось x;
2) сумма проекций всех сил на ось y;
3) сумма моментов всех сил относительно какой-либо оси, проходящей через произвольно выбранную точку O перпендикулярно плоскости действия сил.

Эти условия можно записать в виде равенств

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} &= 0, \\ M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \ldots + M_o(\vec{F}_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

которые называются *уравнениями равновесия*. (Символ $M_o(\vec{F}_k)$ обозначает момент силы $\vec{F}_k$ относительно точки O.)

Оси x, y и точку O можно выбирать произвольно. Обычно их (особенно точку O) выбирают так, чтобы выкладки были более простыми.

Иногда для решения задачи достаточно составить не три уравнения (35), а лишь два из них или одно (если в задаче меньше трех неизвестных величин; см., например, задачи 185, 186, 187).

185. Невесомый стержень AB длиной 1 *м* подвешен на двух нитях (рис. 87). В точке C на расстоянии $AC = 0{,}25$ *м* к стержню подвешен груз P весом 120 *н*. Вычислить натяжения нитей.

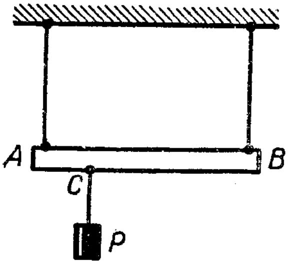


Рис. 87

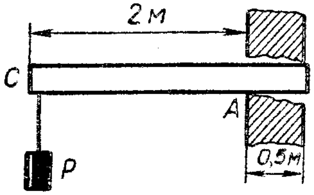


Рис. 88

186. Однородная горизонтальная балка заложена в стену так, что опирается на нее в точках A и B (рис. 88). Вес балки $Q = 600$ *н*, вес груза на ее конце $P = 500$ *н*; размеры указаны на чертеже. Найти реакции стены в точках A и B.

187. Однородные стержни AB и BC скреплены друг с другом в точке B (рис. 89). Стержень AB вдвое короче и вдвое легче стержня BC; угол ABC прямой. Найти угол α.

188. Невесомый стержень AB шарнирно укреплен в точке C и связан двумя нитями с однородным стержнем DF, шарнирно укрепленным в точке F (рис. 90). $AC = 2a$, $CB = a$, $DF = 4a$, вес стержня DF равен P. Найти натяжения нитей.

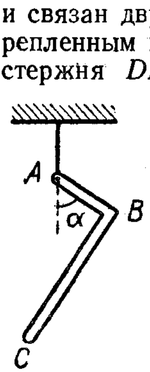


Рис. 89

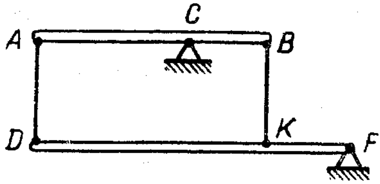


Рис. 90

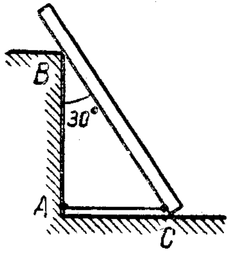


Рис. 91

189. Однородная балка весом 600 *н* и длиной 4 *м* опирается о гладкий пол и о выступ B, находящийся на высоте 3 *м* над полом (рис. 91). Балка образует угол 30° с вертикалью и удерживается веревкой AC, протянутой у самого пола. Вычислить натяжение веревки, реакцию пола и реакцию выступа B.

190. Однородный стержень AB упирается одним концом в угол и удерживается за другой конец нитью (рис. 92). Вес стержня равен P, а угол его наклона к горизонту равен α. Найти натяжение нити, а также давление стержня на пол и на стену.

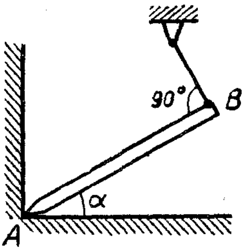


Рис. 92

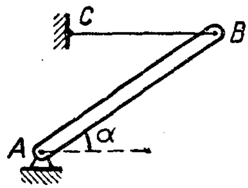


Рис. 93

191. Тонкий однородный стержень шарнирно укреплен в точке A и удерживается нитью BC (рис. 93). Вес стержня равен P, угол его наклона к горизонту равен α. Найти реакцию шарнира и натяжение нити.

4. Трение

При скольжении шероховатых тел возникает сила трения, имеющая величину

$$F = kN, \tag{36}$$

где N — сила давления между трущимися телами, а k — коэффициент трения. Трение может возникнуть и когда скольжения нет (например, если тело лежит на шероховатой наклонной плоскости). В этом случае сила трения удовлетворяет неравенству

$$F \leqslant kN, \tag{37}$$

т. е. может иметь любое значение, не превосходящее kN.

192. Верхний конец лестницы опирается на гладкую вертикальную стену, а нижний находится на шероховатом полу. Коэффициент трения между лестницей и полом равен 0,5. При каком наклоне лестницы она будет находиться в равновесии?

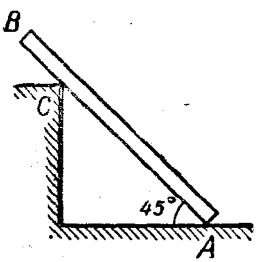


Рис. 94

193. Однородный стержень AB опирается о шероховатый пол и о гладкий выступ C (рис. 94). Угол наклона стержня равен 45°, расстояние AC равно 0,75 AB. При каком коэффициенте трения стержень будет находиться в равновесии в указанном положении?

194. Решить предыдущую задачу, считая, что пол гладкий, а выступ шероховатый.

195. Однородный стержень AB опирается о шероховатый пол и удерживается в равновесии горизонтальной нитью BC (рис. 95). Коэффициент трения между стержнем и полом равен 0,5. При каком наклоне стержня возможно это равновесие?

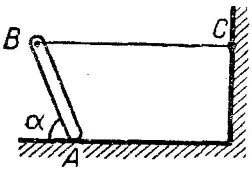


Рис. 95

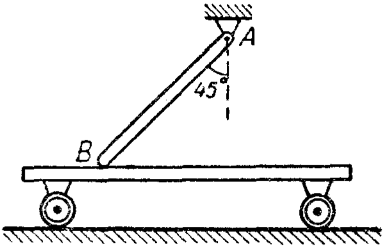


Рис. 96

196. Однородный стержень AB шарнирно укреплен в точке A и опирается о тележку (рис. 96). Коэффициент трения в точке B равен 0,2, а сила давления стержня на тележку равна N. Какую горизонтальную силу нужно приложить к тележке, чтобы сдвинуть ее влево? (Силу трения тележки о пол не учитывать.)

197. Решить предыдущую задачу, считая, что тележку нужно сдвинуть вправо.

5. Простые машины

Рассмотрим какой-нибудь механизм, между звеньями которого нет трения. Пусть к одной из его точек приложена сила, под действием которой механизм приходит в движение и совершает работу. Тогда

$$A_1 = A_2, \tag{38}$$

где A_1 — работа, совершаемая приложенной силой (затраченная работа), а A_2 — работа, совершаемая механизмом (полезная работа). Если сила, движущая механизм, равна F_1, а сила, которую механизм преодолевает, равна F_2, то

$$F_1 s_1 \cos\alpha_1 = F_2 s_2 \cos\alpha_2, \tag{39}$$

где s_1 и s_2 — перемещения точек, к которым приложены силы F_1 и F_2, а α_1 и α_2 — соответствующие углы. Равенство (39) позволяет установить связь между силами F_1, F_2 по известным перемещениям звеньев механизма. Если, как это часто бывает, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то

$$F_1 s_1 = F_2 s_2 \tag{40}$$

или

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{s_2}{s_1}. \tag{41}$$

Равенство (41) выражает «золотое правило механики».

Если имеется несколько сил, приводящих механизм в движение, и несколько сил, которые он преодолевает, то равенство (38) принимает вид:

$$\Sigma A_i = \Sigma A_j, \tag{42}$$

где ΣA_i — сумма затраченных работ, а ΣA_j—сумма полезных работ. Если полезная работа состоит в подъеме некоторых грузов, то в правой части равенства (42) должно стоять увеличение соответствующей потенциальной энергии.

Равенства (38) и (42) справедливы и тогда, когда механизм находится в равновесии (т. е. когда силы, движущие механизм, уравновешиваются силами, препятствующими его движению). В этом случае A_i и A_j — работы не на фактических перемещениях, а на воображаемых (т. е. на тех, которые возникли бы, если бы механизм пришел в движение).

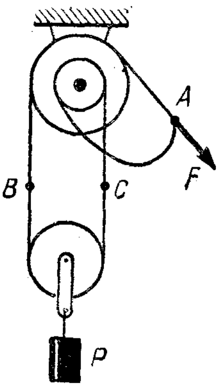


Рис. 97

Если в механизме имеется трение, то нужно учитывать работу, затрачиваемую на его преодоление.

198. На рис. 97 изображен так называемый дифференциальный блок. Какой должна быть сила F, чтобы груз P находился в равновесии? Верхний блок имеет радиусы R и r, нижний блок невесом.

199. На рис. 98 схематически изображен дифференциальный ворот. Какую силу нужно приложить к рукоятке, чтобы равномерно поднимать груз P? Вал имеет радиусы r и r', а рукоятка — радиус R. (Весом рукоятки и блока пренебречь.)

200. Груз весом P поднимают с помощью червячной передачи (рис. 99). Шестерня передачи имеет 30 зубьев, радиус вала, на ко-

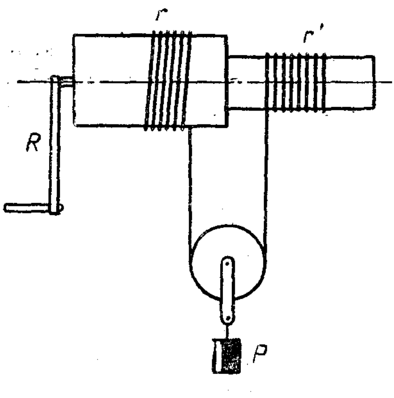


Рис. 98

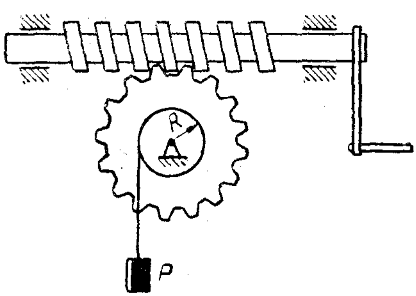


Рис. 99

торый намотан трос, равен R. Какой вращающий момент надо приложить к рукоятке, чтобы равномерно поднимать груз? Потери на трение не учитывать.

201. Решить предыдущую задачу, считая, что коэффициент полезного действия передачи равен 80%.

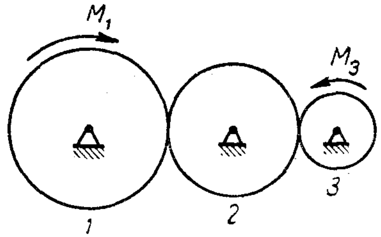


Рис. 100

202. Три зубчатых колеса связаны друг с другом так, как показано на рис. 100. Радиусы колес равны R_1, R_2, R_3, момент, приложенный к первому колесу, равен M_1. Какой момент M_3 надо приложить к третьему колесу, чтобы колеса не вращались?

203. Решить предыдущую задачу, считая, что к первому колесу приложен момент M_1 по часовой стрелке, а ко второму — момент M_2 против часовой стрелки.

204. Система, изображенная на рис. 101, находится в равновесии. Зная вес P, найти силу F.

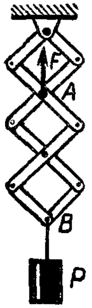


Рис. 101

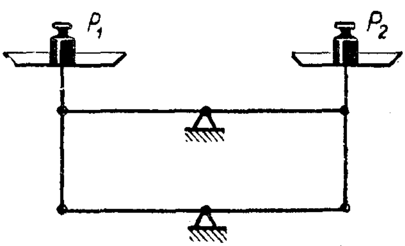


Рис. 102

205. На рис. 102 схематически показаны весы, на чашках которых стоят гири P_1 и P_2 одинакового веса. Нарушится ли равновесие, если переставить гирю P_2 на край чашки?

§ 9. ТЯГОТЕНИЕ

1. Закон всемирного тяготения

Сила гравитационного взаимодействия двух тел равна

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (43)$$

где m_1 и m_2 — массы тел, r — расстояние между ними и G — гравитационная постоянная. В СИ она имеет значение

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ н \cdot м^2/кг^2. \qquad (44)$$

Равенство (43) справедливо для тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, а также для однородных шаров любых размеров. В последнем случае r означает расстояние между центрами шаров.

Из равенства (43) следует, что сила, с которой тело массы m притягивается к Земле, равна

$$P = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{45}$$

где M — масса Земли, а r — расстояние от центра Земли до данного тела. Если, в частности, тело находится на поверхности Земли, то

$$P = P_0 = mg = G\frac{Mm}{R^2},$$

где R — радиус Земли. Из этого соотношения следует, что $G = \frac{gR^2}{M}$, и поэтому формулу (45) можно записать в виде

$$P = mg\frac{R^2}{r^2}. \tag{46}$$

Полученное равенство показывает, как изменяется сила тяжести при удалении от Земли.

206. Два медных шара массой 100 *т* каждый касаются друг друга. С какой силой они притягиваются? (Плотность меди 8,9 *г/см*^{3}.)

207. В качестве единицы массы было предложено взять массу такой материальной точки, которая, притягивая точно такую же точку, находящуюся на расстоянии 1 *м*, сообщает ей ускорение 1 *м/сек*^{2} (гравитационная единица массы). Как велика эта единица?

208. Вообразим, что строительная техника позволяет возводить сколь угодно высокие сооружения. Какую высоту должна иметь башня, расположенная на экваторе Земли, чтобы тело, находящееся на ее вершине, было невесомым?

209. Радиус Луны 1760 *км*, а сила тяжести на Луне в шесть раз меньше, чем на Земле. Какова на Луне первая космическая скорость?

210. Искусственный спутник движется вокруг Земли с первой космической скоростью. Доказать, что период его обращения совпадает с периодом воображаемого математического маятника, длина которого равна радиусу Земли.

211. Планета представляет собой однородный шар с плотностью ρ. Каков период обращения искусственного спутника, движущегося вблизи ее поверхности?

212. Спутник Сириуса, так называемый Сириус *В* состоит из вещества с плотностью $60 \cdot 10^6$ *кг/м*^{3}. Каким был бы период обращения искусственного спутника Земли, если бы Земля имела такую плотность?

213. Радиус орбиты Нептуна в 30 раз больше радиуса орбиты Земли. Какова продолжительность года на Нептуне?

214. Радиус земной орбиты 150 млн. *км*, а радиус Солнца 700 000 *км*. Какова средняя плотность Солнца?

215. Две звезды одинаковой массы m движутся по окружности радиуса R, оставаясь одна против другой. Пренебрегая влиянием других небесных тел, найти скорость движения этих звезд.

216. Как изменится ответ предыдущей задачи, если в центре окружности будет находиться еще одна звезда массой m?

2. Гравитационное поле планеты

Тело, находящееся в гравитационном поле Земли, обладает потенциальной энергией. Если за уровень, от которого она отсчитывается, взять поверхность Земли, то эта энергия будет зависеть от высоты тела над Землей, т. е. от расстояния r (рис. 103) и радиуса Земли. Но потенциальную энергию можно отсчитывать и от какого-нибудь другого уровня, например от показанного на рис. 103 пунктиром. Тогда она будет зависеть от расстояния r и радиуса r_0. В математическом отношении наиболее удобным значением r_0 является $r_0 = \infty$, ибо тогда выражение для потенциальной энергии оказывается наиболее простым. В этом случае она вычисляется по формуле

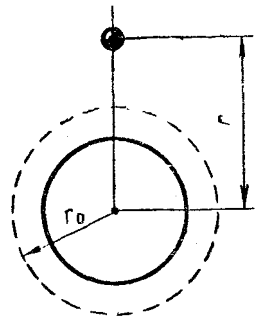


Рис. 103

$$W_p = -G\frac{Mm}{r}, \tag{47}$$

где M — масса Земли, m — масса тела и r — расстояние от тела до центра Земли. Из формулы (47) видно, что эта энергия отрицательна. (Так как $r_0 = \infty$, то тело лежит «ниже» нулевого уровня.)

Формула (47) напоминает известную формулу из электростатики. Пусть частица, несущая отрицательный заряд q, находится в электрическом поле шара, заряд которого равен $+Q$. Тогда потенциальная энергия этой частицы равна

$$W_p = -k\frac{Qq}{r}, \tag{48}$$

где k — коэффициент пропорциональности в законе

$$F = k\frac{Qq}{r^2}, \tag{49}$$

зависящий от выбора единиц. (Числа Q и q в формулах (48), (49) берутся по абсолютной величине, т. е. без учета знака заряда.)

Так как $G = \frac{gR^2}{M}$ (см. вывод формулы (46) на стр. 46), то формулу (47) можно записать в виде

$$W_p = -\frac{mgR^2}{r}. \tag{50}$$

Кроме того, очевидно,

$$W_p = -Fr, \tag{50'}$$

где $F = G\frac{Mm}{r^2}$ — сила тяготения. (Соотношение (50′) более удобно для запоминания.)

Все сказанное справедливо как для гравитационного поля Земли, так и для гравитационного поля любой планеты.

217. Тело массой m удалено от Земли на много миллионов километров. Какова его потенциальная энергия относительно поверхности Земли? (Радиус Земли считать известным.)

218. Зная, что радиус Земли равен 6400 *км* и $g = 9{,}8$ *м/сек*², вычислить вторую космическую скорость.

219. Радиус Луны 1760 *км*, а ускорение свободного падения в шесть раз меньше, чем на Земле. Какова на Луне вторая космическая скорость?

220. Планета имеет массу M и радиус R. Какова на этой планете вторая космическая скорость?

221. Телу, находящемуся на поверхности Земли, сообщена вертикальная скорость 6 *км/сек*. Считая, что сопротивление воздуха отсутствует, найти максимальную высоту его подъема. (Радиус Земли 6400 *км*.)

222. Телу, находящемуся на поверхности Земли, сообщена вертикальная скорость 15 *км/сек*. Какую скорость будет оно иметь, когда удалится в бесконечность? Сопротивление атмосферы и влияние других небесных тел не учитывать.

223. На некоторой планете вторая космическая скорость равна 12 *км/сек*. Телу, находящемуся на поверхности этой планеты, сообщена вертикальная скорость 13 *км/сек*. Какую скорость будет оно иметь в бесконечности?

224. Вообразим, что Земля потеряла свою орбитальную скорость и стала падать на Солнце. С какой скоростью подойдет она к его поверхности? Радиус земной орбиты 150 млн. *км*, радиус Солнца 700 000 *км*, орбитальная скорость Земли 30 *км/сек*.

225. Искусственный спутник Земли движется на высоте, равной радиусу земного шара. Сравните его кинетическую энергию с потенциальной энергией относительно поверхности Земли.

226. Тело массой m находится на высоте h над Землей. Вычислить его потенциальную энергию относительно поверхности Земли и доказать, что при небольших значениях h ее можно считать равной mgh.

§ 10. КОЛЕБАНИЯ

Гармоническое колебание описывается уравнением

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{51}$$

где x — *смещение* точки из положения равновесия, A — *амплитуда*, ω — *круговая частота*, φ_0 — *начальная фаза*. Величина $\omega t + \varphi_0$

называется *фазой колебания*. (Фаза и начальная фаза измеряются в угловых единицах.) Гармоническим является также колебание, описываемое уравнением

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

ибо его можно представить в виде

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Скорость и ускорение точки, движущейся по закону (51), определяются по формулам

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{52}$$

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{53}$$

которые можно записать также в виде

$$v = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{54}$$

$$a = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \tag{55}$$

Сравнивая выражения (54) и (55) с (51), видим, что скорость и смещение сдвинуты по фазе на 90°, а ускорение и смещение — на 180°. Из (54) и (55) получаем:

$$|v|_{max} = A\omega, \quad |a|_{max} = A\omega^2.$$

Период гармонического колебания равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{56}$$

Из выражений (51), (53) следует, что $a = -\omega^2 x$. Поэтому

$$F = ma = -m\omega^2 x,$$

или

$$F = -kx, \tag{57}$$

где $k = m\omega^2$ — некоторый постоянный для данного движения коэффициент. Соотношение (57) выражает характерную особенность гармонического колебания — каждое такое колебание совершается под действием силы типа (57), и, наоборот, всякое движение, совершающееся под действием такой силы, является гармоническим колебанием. Сила вида (57) называется *восстанавливающей*. Она пропорциональна отклонению точки от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому отклонению (т. е. имеет тенденцию восстановить равновесие). Коэффициент k называется *коэффициентом восстанавливающей силы*.

Так как $k = m\omega^2$ и $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{58}$$

Формула (58) позволяет вычислять период по известной массе и известному коэффициенту восстанавливающей силы.

Восстанавливающая сила может иметь различную физическую природу. Простейшей силой такого рода является сила, развиваемая пружиной. В этом случае коэффициент k называется *жесткостью пружины*. Если обозначить ее через c, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{59}$$

Эта формула определяет период колебаний, совершающихся под действием пружины (или нескольких пружин). Она верна как в случае горизонтальных колебаний (рис. 104), так и в случае вертикальных колебаний (рис. 105).

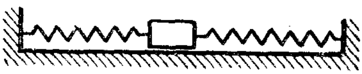


Рис. 104

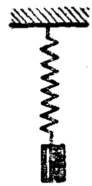


Рис. 105

Если амплитуда колебаний математического маятника невелика, то их можно считать гармоническими. Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{60}$$

где l — длина маятника.

227. На какую высоту над Землей надо поднять математический маятник, чтобы период его колебаний увеличился на 1%?

228. В шахту какой глубины надо опустить математический маятник, чтобы период его колебаний возрос на 1%?

229. Формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ можно пользоваться лишь при небольших колебаниях маятника. Более точной является формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

где α — амплитуда, выраженная в радианах. Как велика поправка, которую вносит эта формула при $\alpha = 20°$ и $\alpha = 45°$?

230. Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в своей плоскости с частотой 2 *гц* и амплитудой 1 *см*. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу равен 0,2. Будет ли груз скользить по платформе?

231. Груз, висящий на пружине, совершает вертикальные колебания. Каков период этих колебаний, если масса груза равна 2 *кг*, а жесткость пружины 450 *н/м*? Каким будет период этих колебаний на Луне?

232. Когда груз неподвижно висел на вертикальной пружине, ее удлинение было равно 5 *см*. Затем груз оттянули и отпустили, вследствие чего он начал колебаться. Каков период этих колебаний?

233. Груз (рис. 104) имеет массу 1 *кг*, а связанные с ним пружины имеют жесткость 2500 *н/м*. Какой будет амплитуда колебаний этого груза, если сообщить ему начальную скорость 2 *м/сек*? Горизонтальная плоскость гладкая.

234. Решить предыдущую задачу, считая, что скорость 2 *м/сек* была сообщена грузу после того, как его отклонили на 3 *см* от положения равновесия.

Рис. 106

235. Груз связан с пружиной посредством нити (рис. 106). Может ли он совершать вертикальные гармонические колебания с амплитудой 2 *см* и частотой 5 *гц*?

236. Один математический маятник имеет период 3 *сек*, а другой — 4 *сек*. Каков период колебаний математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

237. Груз, подвешенный на пружине, совершал вертикальные колебания. Когда он имел массу m_1, период колебаний был равен 0,6 *сек*, а когда его массу сделали равной m_2, период стал равным 0,8 *сек*. Каким будет период колебаний этого груза, если его масса будет равна $m_1 + m_2$. (Числа m_1 и m_2 неизвестны.)

238. Вообразим, что между Москвой и Ленинградом прорыт прямолинейный тоннель, в котором проложены рельсы (рис. 107).

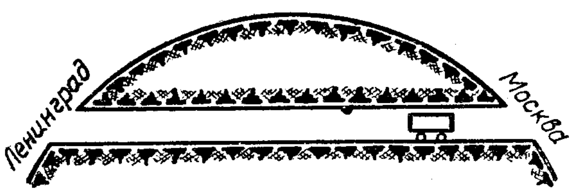


Рис. 107

Как будет вести себя вагон, поставленный на эти рельсы, если на его пути не будет трения и сопротивления воздуха? Сколько времени он будет двигаться до Ленинграда? (Начальная скорость вагона равна нулю.)

239. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D (рис. 108). Зная, что путь от O до D она проходит за 3 *сек*, вычислить время, которое она затрачивает на первую половину этого пути (O — середина отрезка CD).

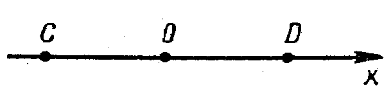


Рис. 108

240. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D (рис. 108). Зная, что ее максимальная скорость равна 10 *м/сек*, найти ее среднюю скорость на пути от C к D.

241. Колебания описываются уравнением $x = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$. Какова их амплитуда? Являются ли они гармоническими?

§ 11. ДВИЖУЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Пусть некоторая система отсчета движется с ускорением поступательно. Тогда все, что в ней происходит, будет протекать так, будто эта система неподвижна, но на каждое находящееся в ней тело действует *сила инерции*. Эта сила равна $(-m\vec{a})$, где $\vec{a}$ — ускорение, с которым движется система отсчета, а m — масса тела. (Знак минус показывает, что сила инерции направлена противоположно ускорению системы отсчета.) Простейшим примером служит ускоренно поднимающийся лифт. В нем все явления протекают так, будто на находящиеся там тела действуют силы инерции, направленные вниз (ибо ускорение лифта направлено вверх). Поэтому тело, лежащее в этом лифте, давит на пол с силой $mg+ma$, а тело, свободно падающее, имеет *относительно лифта* ускорение $\frac{mg+ma}{m}$.

Если система отсчета движется прямолинейно и равномерно, то $\vec{a} = 0$, т. е. силы инерции отсутствуют. Следовательно, *в системе, движущейся прямолинейно и равномерно, все явления протекают так же, как в неподвижной системе*. Это положение называется *принципом относительности* или *принципом Галилея*.

242. Поезд движется прямолинейно с постоянным ускорением a. В одном из вагонов поезда висит математический маятник, неподвижный относительно этого вагона. Какой угол образует маятник с вертикалью?

243. В лифте, поднимающемся с постоянным ускорением a, колеблется математический маятник. Каков период его колебаний? Как изменится ответ, если лифт будет двигаться с ускорением вниз?

244. Математический маятник находится в поезде, движущемся вправо с постоянным ускорением a. Каков период колебаний маятника?

245. В вагоне неподвижного поезда висит математический маятник. В некоторый момент поезд трогается и движется с постоянным ускорением a, вследствие чего маятник начинает отклоняться назад. Каков максимальный угол его отклонения? (Поезд движется прямолинейно.)

246. Вагон движется по прямой с постоянным ускорением $a = 1{,}8$ *м/сек*^{2} (рис. 109). В вагоне находится математический маятник, нить которого в начальный момент горизонтальна. Найти скорость маятника относительно вагона в момент, когда маятник будет проходить через нижнее положение. Длина маятника равна 1 *м*.

247. В вагоне равномерно и прямолинейно движущегося поезда висит математический маятник длиной 1 *м*. В некоторый момент поезд начинает тормозить и движется с замедлением 9,8 *м/сек*². Какова скорость маятника относительно вагона в момент отклонения на угол 45°?

248. Гладкая наклонная плоскость, показанная на рис. 110, движется вправо с ускорением a. На плоскости лежит брусок массой m, удерживаемый нитью AB. Найти натяжение нити и давление бруска на плоскость.

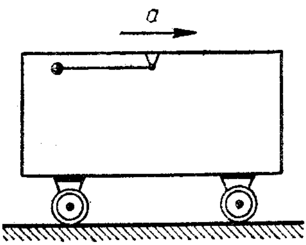


Рис. 109

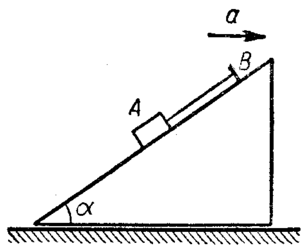


Рис. 110

249. Нить AB, о которой говорилось в предыдущей задаче, оборвалась. Найти ускорение бруска относительно наклонной плоскости.

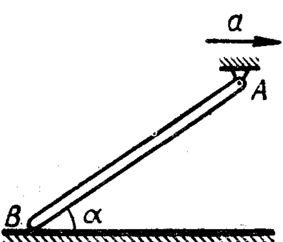


Рис. 111

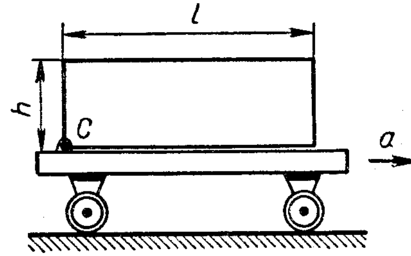


Рис. 112

250. Однородный стержень AB (рис. 111) шарнирно связан с точкой A и опирается концом B о гладкую горизонтальную плоскость. С каким ускорением должна двигаться вправо точка A, чтобы давление стержня на плоскость было равно нулю?

251. Однородный брусок шарнирно укреплен на тележке, движущейся с ускорением, направленным вправо (рис. 112). Каким должно быть это ускорение, чтобы брусок начал поворачиваться вокруг шарнира C? Размеры указаны на чертеже.

252. В лифте, поднимающемся с ускорением a, стоит ящик с песком. Камень массой m, находящийся на высоте h над поверхностью песка, начинает падать без начальной скорости (относительно лифта). Какое количество тепла выделится при ударе камня о песок?

253. Решить предыдущую задачу, считая, что камень падал не в лифте, а в поезде, движущемся с ускорением a по прямолинейному горизонтальному пути.

254. Корабль движется поступательно и прямолинейно с постоянной скоростью v. По палубе едет велосипедист, двигаясь от носа к корме. Если скорость велосипедиста относительно палубы будет равна v, то он в сущности будет оставаться неподвижным (относительно берега). Сможет ли велосипедист сохранять в этом случае равновесие?

§ 12. ГИДРО- И АЭРОМЕХАНИКА

Если жидкость покоится и на нее действуют только силы, приложенные к ее поверхности, то во всех точках жидкости давление одинаково (закон Паскаля).

Если однородная жидкость находится в поле силы тяжести и точка B лежит ниже точки A, то

$$p_B = p_A + \rho g(h_A - h_B), \tag{61}$$

где p_A и p_B — давления в точках A и B, $(h_A - h_B)$ — разность высот этих точек и ρ — плотность жидкости.

На тело, погруженное в однородную жидкость, действует выталкивающая сила F, равная весу вытесненной жидкости (закон Архимеда). Если объем вытесненной жидкости равен V, а ее плотность равна ρ, то

$$F = \rho g V. \tag{62}$$

Законы Паскаля и Архимеда верны также для газов.

255. Жидкость сжимается поршнем (рис. 113). Сила, приложенная к поршню, равна F, а площадь дна сосуда равна s. Найти дав-

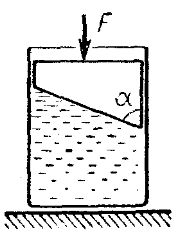


Рис. 113

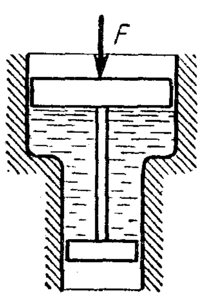


Рис. 114

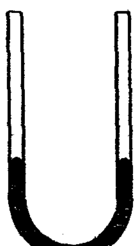


Рис. 115

ление в жидкости. (Атмосферное давление и вес жидкости и поршня не учитывать.)

256. Невесомая жидкость находится между двумя поршнями, жестко связанными друг с другом (рис. 114). Сила, действующая на верхний поршень, равна F, а площади поршней равны S и s. Найти давление в жидкости. (Атмосферное давление не учитывать, толщиной штока, соединяющего поршни, пренебречь.)

257. В U-образной трубке (рис. 115) находится ртуть. На сколько повысится уровень в правой части трубки, если в левую налить воды так, чтобы она образовала столб высотой $H = 136$ *мм*? (Правое и левое колено одинаковы.)

258. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть (рис. 116). Когда в левый сосуд налили слой воды высотой 102 *мм*, а в правый — высотой 153 *мм*, уровень ртути в среднем сосуде повысился. На сколько?

259. Концы U-образной трубки (см. рис. 115) на 26 *см* выше уровня ртути. После того как левое колено заполнили водой, она образовала столб высотой h. Вычислить h.

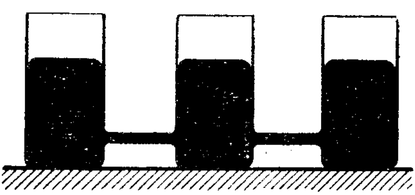


Рис. 116

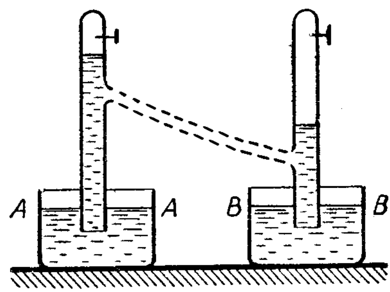


Рис. 117

260. В сосуды с водой опустили две трубки (рис. 117) и откачали из них часть воздуха. (Из левой — больше, из правой — меньше.) Будет ли вода переливаться из левой трубки в правую, если соединить их, как показано пунктиром?

261. Ответить на вопрос предыдущей задачи в случае, когда уровень AA ниже уровня BB.

262. В цилиндрическом сосуде с водой плавает кусок льда. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает?

263. Ответить на вопрос предыдущей задачи в случае, когда внутри льда находится кусок свинца.

264. Решить задачу 262 в случае, когда внутри льда находится кусок дерева.

265. В цилиндрическом сосуде плавает деревянный брусок, под которым находится тонкий резиновый шар, наполненный водородом (детский «воздушный шар»). Как изменится уровень воды в сосуде, если шар всплывет и улетит? (Весом шара пренебречь.)

266. Жидкость налита в конический сосуд, показанный на рис. 118. Вес жидкости равен P, ее плотность равна ρ, высота равна H и площадь дна равна S. Пренебрегая атмосферным давлением, вычислить силу, с которой жидкость действует на боковую поверхность сосуда.

267. Решить задачу 266 для сосуда, показанного на рис. 119.

268. Сосуд с водой движется вправо с постоянным ускорением a (рис. 120). Как будет расположена свободная поверхность воды?

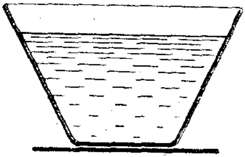


Рис. 118

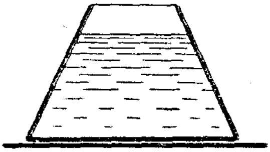


Рис. 119

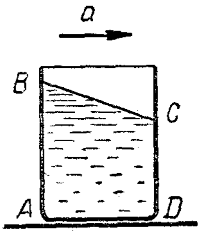


Рис. 120

269. В сосуде (см. задачу 268) вода расположилась так, как показано на рис. 120. Каково давление воды в точке A? (Все размеры считать известными.)

270. Деревянный куб плавает на поверхности пруда. Можно ли сказать, что вода действует на него с силой, равной $\rho g V$, где V — объем вытесненной воды, а ρ — ее плотность?

271. Со дна озера всплыл кусок дерева. За счет чего увеличилась его потенциальная энергия?

272. В воде тело весит P_1, а в керосине — P_2. Найти его вес в глицерине. Плотность воды 1000 *кг/м*^{3}, плотность керосина 800 *кг/м*^{3} и плотность глицерина 1250 *кг/м*^{3}.

273. Плавая в жидкости A, куб погружался на 40 *мм*, а плавая в жидкости B — на 60 *мм*. На сколько он погрузится в жидкости C, плотность которой равна среднему арифметическому плотностей двух первых жидкостей?

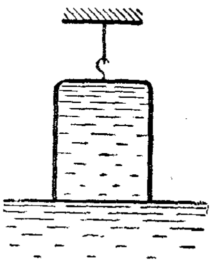


Рис. 121

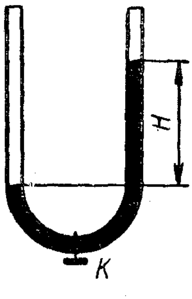


Рис. 122

274. В сосуде находится жидкость с плотностью ρ_1, а под ней —жидкость с плотностью ρ_2. Куб плавает, будучи погруженным наполовину в первую жидкость и наполовину во вторую. Какова плотность вещества, из которого сделан куб?

275. Перевернутый стакан наполнен водой и подвешен на нити (рис. 121). Кромка стакана касается воды. Вес стакана равен P, а вес находящейся в нем воды равен P'. Каково натяжение нити? (Толщиной стенок стакана пренебречь.)

276. В U-образной трубке ртуть расположена, как показано на рис. 122. Площадь поперечного сечения трубки равна S, разность высот уровней ртути равна H, плотность ртути равна ρ. Сколько выделится тепла, если открыть кран K и дать уровням ртути сравняться?

277. В баке находится вода. Камень, расположенный у ее поверхности, падает без начальной скорости и опускается на дно. Масса камня равна 260 *г*, его объем равен 100 *см*^{3}, глубина дна равна 2 *м*. Сколько выделится тепла при падении камня?

278. Аэростаты наполняют водородом либо гелием. Плотность водорода 0,09 *кг/м*^{3}, плотность гелия вдвое больше, а плотность воздуха 1,29 *кг/м*^{3}. На сколько процентов подъемная сила водорода больше подъемной силы гелия?

279. При движении раскрытого парашюта на него действует сила сопротивления воздуха. Она равна

$$F = k\rho S v^2,$$

где ρ— плотность воздуха, S — площадь поверхности парашюта, v — скорость и k — безразмерный коэффициент, равный приблизительно 0,5. Какую поверхность должен иметь парашют, чтобы парашютист массой 80 *кг* опускался со скоростью 5 *м/сек*? Сравните полученную площадь с площадью комнаты.

ГЛАВА II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 13. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ

При нагревании твердого тела его размеры увеличиваются; при этом

$$l = l_0(1 + \alpha t), \tag{63}$$

$$S = S_0(1 + 2\alpha t), \tag{64}$$

где l_0 и S_0 — длина и площадь при 0°C, а l и S — при температуре t°C. Коэффициент α называется коэффициентом линейного расширения. Нагревание твердого тела или жидкости приводит к увеличению их объема, которое можно найти по формуле

$$V = V_0(1 + \beta t), \tag{65}$$

где V_0—объем при температуре 0° C, а V—при температуре t°C. Коэффициент β называется коэффициентом объемного расширения. Для твердых тел $\beta = 3\alpha$.

Из равенства (65) следует, что

$$\rho = \rho_0(1 - \beta t), \tag{66}$$

где ρ_0 — плотность однородного твердого тела или жидкости при 0°C, а ρ — при температуре t°C.

Соотношения (63)—(66) являются приближенными и верны лишь при не очень больших значениях t. Они остаются приближенно верными и тогда, когда под l_0, S_0, V_0, ρ_0 понимают начальные значения соответствующих величин (при температуре t_0), а под l, S, V, ρ — конечные (при температуре $t_0 + t$).

280. При нагревании металлического кольца его толщина увеличилась на 0,5%. Как изменился при этом его внутренний диаметр?

281. При температуре 0°C железный стержень имеет длину 20 *см*, а алюминиевый — на 10 *см* меньше. Какой будет разность длин этих стержней при температуре t°C? Коэффициент линейного расширения железа равен $12 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, а алюминия —$24 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$.

282. Стержень длиной l_1 сделан из материала с коэффициентом линейного расширения α_1, а стержень длиной l_2 — из материала с коэффициентом линейного расширения α_2. Стержни спаяли, и получился стержень длиной $l_1 + l_2$. Каков его коэффициент линейного расширения?

283. Цилиндрический алюминиевый сосуд с ртутью нагрели на 100°. На сколько процентов увеличилась высота столба ртути? Коэффициент линейного расширения алюминия равен $24 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, а коэффициент объемного расширения ртути — $18 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

284. Кусок меди погружен в воду. На сколько процентов изменится действующая на него выталкивающая сила, если нагреть его и воду на 40°? Коэффициент линейного расширения меди равен $17 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, коэффициент объемного расширения воды считать равным $15 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

285. Какую силу надо приложить к стальному стержню сечением 1 *см*^{2}, чтобы растянуть его на столько же, на сколько он удлиняется при нагревании на 1°? Коэффициент линейного расширения стали равен $12 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, а ее модуль упругости равен $2 \cdot 10^{11}$ *н/м*^{2}.

§ 14. ТЕПЛОТА, РАБОТА, ЭНЕРГИЯ

В силу закона сохранения энергии

$$\Delta Q = \Delta U + A, \tag{67}$$

где ΔQ — количество теплоты, сообщенной телу, ΔU — приращение его энергии и A — работа, совершенная телом. (Эти величины могут иметь любой знак, так как теплота может быть не подведена к телу, а отнята от него, энергия тела может не увеличиваться, а уменьшаться, и работа, совершенная телом, может быть как положительной, так и отрицательной.)

Если изменение внутренней энергии тела не сопровождается изменением его агрегатного состояния, то

$$\Delta U = C\Delta t, \tag{68}$$

где U — внутренняя энергия тела, C — его теплоемкость, и Δt — изменение температуры. Если тело однородно, то

$$\Delta U = cm\Delta t, \tag{69}$$

где m — масса тела, а c — удельная теплоемкость.

При плавлении однородного кристаллического тела его внутренняя энергия увеличивается. В этом случае

$$\Delta U = \lambda m, \tag{70}$$

где m — масса тела, а λ — удельная теплота плавления. Если происходит кристаллизация, то внутренняя энергия тела на столько же уменьшается.

Если жидкость испаряется, то ее внутренняя энергия возрастает на величину

$$\Delta U = rm, \tag{71}$$

где m — масса жидкости, а r — удельная теплота парообразования. Если пар конденсируется, то внутренняя энергия уменьшается на такую же величину.

(Формулы (70), (71) относятся к случаю, когда агрегатное состояние тела изменяется, а его температура остается неизменной. В противном случае нужно учитывать изменение внутренней энергии и вследствие изменения температуры.)

Количество теплоты измеряют в тех же единицах, что и энергию, т. е. в джоулях. Кроме того, ее часто измеряют в чисто тепловых единицах — калориях или килокалориях. Связь между указанными единицами дается соотношением: 1 *кал* = 4,19 *дж*.

286. На какую высоту можно было бы поднять груз в одну тонну, если бы удалось полностью использовать энергию, освобождающуюся при остывании стакана чая? Объем стакана 250 *см*^{3}, начальная температура чая 100°C, а конечная 20°C.

287. Объем воды в Мировом океане равен примерно $13 \cdot 10^8$ *км*^{3}. Вообразим, что эту воду охладили на 0,01° и полностью использовали освободившуюся энергию. Как она велика? Сравните ее с годовым производством электроэнергии во всем мире (около 5000 млрд. *квт·ч*).

288. Отвесно падающие лучи солнца приносят на землю ежесекундно 700 *дж* лучистой энергии на 1 *м*^{2}. Какую нужно иметь площадь, чтобы, используя эту энергию с к.п.д. 10%, обеспечить энергией лампочку в 60 *вт*?

289. Цех имеет 50 ткацких станков мощностью 1 *квт* каждый. Сколько угля нужно было бы ежесуточно сжигать в топке с к.п.д. 50%, чтобы получать теплоту, выделяющуюся при круглосуточной работе этих станков? (Теплота сгорания угля 7500 *ккал/кг*.)

290. Поезд, идущий со скоростью 72 *км/ч*, останавливается с помощью тормозов. На сколько поднялась бы температура воздуха в вагонах, если бы вся энергия, поглощаемая при торможении, шла на нагревание этого воздуха. Масса вагона 20 *т*, объем вагона 120 *м*^{3}, плотность воздуха 1,3 *кг/м*^{3}, удельная теплоемкость воздуха 1000 *дж/кг · град*.

291. Трубка, не содержащая воздуха, соединена с широким сосудом, наполненным ртутью (рис. 123). Когда открыли кран K, в трубку вошел столб ртути высотой h и массой m. Сколько при этом выделилось тепла?

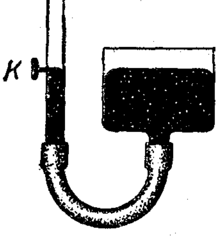


Рис. 123

292. При полном сгорании 1 *г* углерода получается углекислый газ CO_2, а при неполном — окись углерода CO. При этом в первом случае выделяется 8080 *кал*, а во втором — 2420 *кал*. Сколько тепла выделяется при сгорании 1 *г* окиси углерода?

293. Мощность солнечного излучения — около 65 000 *квт* на 1 *м*^{2} поверхности Солнца. Сколько тонн теряет ежесекундно Солнце вследствие излучения? (Радиус Солнца — 700 000 *км*.)

294. На что расходуется электроэнергия, потребляемая домашним холодильником?

295. Холодильник имеет мощность 160 *вт* и производительность 2 *ккал* «холода» в 1 *мин*. (Холодильник используется для приготовления льда.) Сколько тепла сообщает он за 1 *мин* комнате, в которой установлен?

296. Сжимая газ адиабатически, мы совершаем работу. Увеличивается ли при этом потенциальная энергия газа?

297. Можно ли увеличить внутреннюю энергию горячего тела за счет уменьшения внутренней энергии холодного тела?

298. Можно ли всю теплоту, взятую от теплового резервуара, превратить в работу?

299. Сосуд состоит из двух половин, разделенных краном. В одной половине находится идеальный газ, а в другой — вакуум. Уменьшится ли температура газа, если, открыв кран, дать газу возможность расширяться?

300. В калориметре находилась вода при температуре 10°C. Во время первого опыта туда бросили 100 *г* льда с температурой 0°C, а во время второго—200 *г* льда с температурой 0°C. При этом в обоих случаях в калориметре установилась одна и та же температура. Какая?

301. Чистую воду можно охладить до температуры —10°C (неустойчивое состояние). Какая часть воды превратится в лед, если начнется кристаллизация? (Теплообмен происходит лишь между водой и льдом; удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*.)

§ 15. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

1. Уравнение состояния

Идеальный газ подчиняется уравнению

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \qquad (72)$$

где p — давление, V — объем, T — абсолютная температура, m — масса газа и μ — его молекулярная масса. Константа R, одинаковая для всех газов, называется универсальной газовой постоянной. В СИ она имеет значение

$$R = 8{,}31 \cdot 10^3 \text{ дж/кмоль} \cdot \text{град}.$$

Соотношение (72) называется уравнением Клапейрона—Менделеева.

Так как молекулярная масса газа совпадает с массой одного киломоля, выраженной в килограммах, то отношение $\frac{m}{\mu}$ равно числу киломолей данного газа. (Именно поэтому в размерность константы входит символ *кмоль*.)

Разделив равенство (72) на V, получим:

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad (73)$$

где ρ — плотность газа. Следовательно, давление газа пропорционально его плотности и абсолютной температуре.

Из закона Клапейрона—Менделеева следует, что:

1) если масса и температура газа постоянны, то

$$pV = \text{const}, \quad (74)$$

т. е.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

(закон Бойля—Мариотта);

2) если масса и давление газа постоянны, то

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \quad (75)$$

т. е.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

(закон Гей-Люссака);

3) если масса и объем газа постоянны, то

$$\frac{p}{T} = \text{const}, \quad (76)$$

т. е.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

(закон Шарля);

4) если масса газа постоянна, то

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \quad (77)$$

т. е.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

302. Вода с температурой 27°С целиком заполняет закрытый сосуд объемом 1 *л*. Каким стало бы давление в этом сосуде, если бы силы взаимодействия между молекулами воды исчезли?

303. Каков объем одного моля идеального газа при давлении 10^5 *н/м²* и температуре 27°С?

304. Пусть давление измеряется в миллиметрах ртутного столба, объем — в кубических метрах и масса — в граммах. Каким будет тогда числовое значение R?

305. В сосуде объемом 12 *л* находится 25 *г* азота при температуре 27°С. Каково его давление?

306. Кислород с температурой 77°С и давлением $2 \cdot 10^5$ *н/м²* занимает объем 10 *л*. Какова его масса?

307. Когда из сосуда выпустили некоторое количество газа, давление в нем упало на 40%, а абсолютная температура — на 20%. Какую часть газа выпустили?

308. В сосуде объемом 1 *л* находится 1 *г* газа с температурой 27°С и давлением $12{,}5 \cdot 10^5$ *н/м²*. Какой это газ?

309. В сосуде находится озон при температуре 527°С. По прошествии некоторого времени он полностью превращается в кислород, а его температура падает до 127°С. На сколько процентов изменяется при этом давление?

310. Какова плотность азота при температуре 0°С и давлении 10^5 *н/м²*?

311. Найти связь между плотностью газа и его молекулярной массой при нормальных условиях. (Нормальное давление можно считать равным 10^5 *н/м²*.)

312. Когда газ, объем которого оставался неизменным, нагрели на 30°, его давление увеличилось на 10%. Какова начальная температура газа?

313. Когда объем, занимаемый газом, уменьшили на 10%, а температуру увеличили на 16°, его давление возросло на 20%. Какова начальная температура газа?

314. Когда при изотермическом сжатии газа его объем уменьшили на 1 *л*, давление возросло на 20%. На сколько процентов увеличилось бы давление, если бы объем был уменьшен на 2 *л*?

315. Два сосуда, содержащие один и тот же газ, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов равны V_1 и V_2, а давления в них — p_1 и p_2. Каким будет давление газа после открытия крана соединительной трубки? (Температура газа постоянна.)

316. Два сосуда, содержащие одинаковую массу одного и того же газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление газа 4000 *н/м²*, а во втором — 6000 *н/м²*. Какое установится давление после открытия крана? (Температура газа постоянна.)

317. Два сосуда соединены трубкой с краном. В первом сосуде находится 2 *кг* газа под давлением $4 \cdot 10^5$ *н/м²*, а во втором — 3 *кг* того же газа под давлением $9 \cdot 10^5$ *н/м²*. Какое установится давление после открытия крана? (Температура газа постоянна.)

318. Вертикальная барометрическая трубка опущена в широкий сосуд с ртутью. Столб ртути в трубке имеет высоту 40 *мм*, а столб воздуха над ртутью — 190 *мм*. На сколько надо опустить трубку, чтобы уровни ртути сравнялись? Атмосферное давление равно 760 *мм рт. ст.*

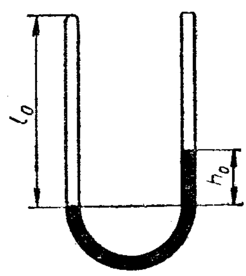


Рис. 124

319. В U-образной трубке (рис. 124) высота столба воздуха $l_0 = 300$ *мм*, а высота столба ртути $h_0 = 110$ *мм*. В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на 40 *мм*. На сколько поднялся уровень ртути в левом колене? Атмосферное давление равно 760 *мм рт. ст.*

320. В трубке, показанной на рис. 124, высота столба воздуха $l_0 = 368$ *мм*, а высота столба ртути $h_0 = 140$ *мм*. Температура окружающего воздуха равна 27°C, а давление — 760 *мм рт. ст.* На сколько повысится уровень ртути в правом колене, если атмосферное давление останется прежним, а температура увеличится на 15°?

321. При нагревании газа был получен график зависимости его давления от абсолютной температуры (рис. 125). Как изменялся при этом объем газа?

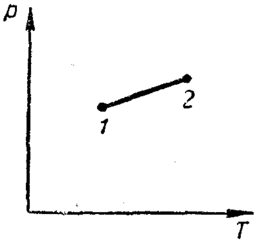


Рис. 125

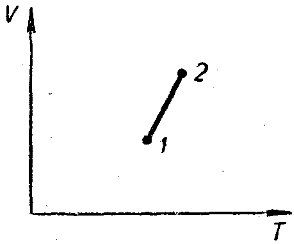


Рис. 126

322. При нагревании газа был получен график зависимости его объема от температуры (рис. 126). Как изменялось при этом давление?

2. Закон Дальтона

Если сосуд занят смесью из нескольких газов, то

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \tag{78}$$

где p — давление смеси, а p_k — давление, которое было бы в этом сосуде, если бы там был лишь k-й газ (в том количестве, в каком он присутствует в смеси). Давления $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называются *парциальными*.

323. Сосуд объемом 1 *л* занят смесью из 2 *г* кислорода и 3 *г* азота. Каково давление этой смеси при температуре 27°C?

324. Сосуд объемом 1 *л* занят смесью из 2 *г* кислорода и 3 *г* азота. Какова температура этой смеси, если ее давление $5 \cdot 10^5$ *н/м²*?

325. В сосуде объемом 10 *л* находится смесь кислорода и углекислого газа (CO_2). Температура смеси равна 27°C, давление — 3×10^5 *н/м²*, масса — 40 *г*. Найти массу каждого из газов.

326. В атмосферном воздухе на долю азота приходится 76% массы, а на долю кислорода — 24% (если пренебречь ничтожными примесями других газов). Считая атмосферное давление равным p, найти парциальные давления азота и кислорода.

327. В закрытом сосуде находится воздух и капля воды массой 0,5 *г*. Объем сосуда 25 *л*, давление в нем 10^4 *н/м²* и температура 300°К. Каким будет давление в сосуде, когда капля испарится? (Температуру считать неизменной.)

328. Смесь состоит из 32 *г* кислорода (O_2) и 22 *г* углекислого газа (CO_2). Какова ее плотность при температуре 0°С и давлении 10^5 *н/м²*?

329. При некоторой температуре и некотором давлении газ A имеет плотность 0,4 *кг/м³*, а газ B — 0,6 *кг/м³*. Какую плотность будет иметь при этих условиях смесь газов A и B, если массы смешиваемых газов одинаковы?

330. При температуре 0°С и давлении 10^5 *н/м²* воздух имеет плотность 1,273 *кг/м³*. Считая, что он состоит только из кислорода и азота, найти его весовой состав.

331. Газ, масса которого равна m_1, а молекулярная масса — μ_1, смешали с газом, масса которого равна m_2, а молекулярная масса — μ_2. Найти среднюю молекулярную массу смеси.

332. В атмосферном воздухе на долю азота приходится 76% массы, а на долю кислорода — 24% (если пренебречь примесями других газов). Пользуясь решением предыдущей задачи, вычислить среднюю молекулярную массу воздуха.

333. Два сосуда, содержащие различные газы, соединены трубкой с краном. Объемы сосудов равны V_1 и V_2, давления в них равны p_1 и p_2, молекулярные массы газов равны μ_1 и μ_2. Какое давление установится после открытия крана соединительной трубки? (Температура не изменяется.)

334. Решить предыдущую задачу, считая объемы сосудов неизвестными, но зная, что в каждом из них содержится один киломоль газа.

335. Сосуд, содержащий кислород (O_2), и сосуд, содержащий углекислый газ (CO_2), соединены трубкой с краном. Давления газов равны p_1 и p_2, массы газов одинаковы. Какое давление установится после открытия крана соединительной трубки? (Температура не изменяется.)

§ 16. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГАЗА

Согласно закону сохранения энергии

$$Q = \Delta U + A, \tag{79}$$

где Q — теплота, сообщенная газу, ΔU — увеличение его внутренней энергии и A — работа, совершенная газом.

Если газ идеальный, то его внутренняя энергия равна

$$U = c_V mT, \tag{80}$$

где m — масса газа, а c_V — его удельная теплоемкость при постоянном объеме. Следовательно, для идеального газа

$$Q = c_V\, mT + A. \qquad (81)$$

Из этого равенства видно, что для повышения температуры идеального газа на 1° требуется большее или меньшее количество тепла, в зависимости от работы, совершаемой газом при нагревании. Поэтому, когда нагревание газа сопровождается его расширением, удельная теплоемкость газа оказывается большей, чем в случае, когда газ нагревают при постоянном объеме.

Удельную теплоемкость газа при постоянном давлении обозначают через c_p. Очевидно, что $c_p > c_V$.

Газ, расширяющийся при постоянном давлении, совершает работу

$$A = p\,(V_2 - V_1) = p\Delta V, \qquad (82)$$

где V_1 — начальный объем газа, а V_2 — конечный. В этом случае равенство (81) приобретает вид:

$$Q = c_V\, m\Delta T + p\Delta V. \qquad (83)$$

336. При нагревании газа его давление изменялось согласно графику, изображенному на рис. 125. Сообщалось ли этому газу тепло?

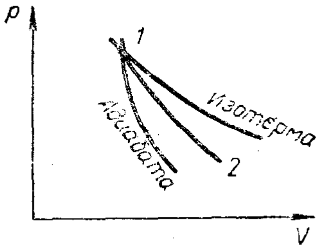


Рис. 127

337. Расширение газа происходило по кривой *1—2*, лежащей между изотермой и адиабатой (рис. 127). Как изменялась температура этого газа? Подводилось ли к нему тепло?

338. При адиабатическом расширении 1 *кг* азота совершил работу 300 *дж*. На сколько уменьшилась его внутренняя энергия и на сколько понизилась температура? Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме $c_V = 745$ *дж/кг · град*.

339. Газ, у которого $m = 1$ *кг*, $p = 2 \cdot 10^5$ *н/м²* и $c_V = 700$ *дж/кг · град*, нагревали, давая ему расширяться. Какова удельная теплоемкость газа в этом процессе, если его температура повысилась на 2°, а объем увеличился на 0,001 *м³*? (Предполагается, что газ имел достаточно большой объем и достаточно высокую температуру. Поэтому его давление можно считать постоянным.)

340. Решить предыдущую задачу, считая, что газ нагревали в процессе сжатия и что его объем не увеличился на 0,001 *м³*, а уменьшился на эту величину.

341. Азот нагревали при постоянном давлении. Зная, что масса азота равна 280 *г*, количество затраченного тепла равно 600 *дж* и $c_V = 745$ *дж/кг · град*, найти повышение температуры азота.

342. При нагревании в постоянном объеме кислород имеет удельную теплоемкость $c_V = 657$ *дж/кг · град*. Какова удельная теплоемкость кислорода при постоянном давлении?

343. При адиабатическом расширении азота его объем увеличился на 1%. На сколько процентов изменилась его абсолютная температура и на сколько — давление? При нагревании в постоянном объеме азот имеет удельную теплоемкость $c_V = 745$ *дж/кг · град*. (Учесть, что при увеличении объема на 1% давление изменяется очень мало.)

344. В процессе расширения азота его объем увеличился на 2%, а давление уменьшилось на 1%. Какая часть теплоты, полученной азотом, была превращена в работу? (При нагревании в постоянном объеме азот имеет удельную теплоемкость $c_V = 745$ *дж/кг · град*.)

345. Решить предыдущую задачу, считая, что давление уменьшилось на: 1) 2%; 2) 2,5%.

§ 17. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Киломоль каждого вещества содержит одно и то же число молекул. Оно называется числом Авогадро и равно

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{кмоль}}. \qquad (84)$$

Зная молекулярную массу вещества и число Авогадро, можно вычислить массу одной молекулы этого вещества.

В уравнении $pV = \frac{m}{\mu} RT$ отношение $\frac{m}{\mu}$ есть число киломолей данного газа. Поэтому его можно представить в виде

$$\frac{m}{\mu} = \frac{n}{N},$$

где n — общее число молекул газа, а N — число Авогадро. Подставив это выражение в уравнение Менделеева—Клапейрона, получим:

$$pV = \frac{n}{N} RT,$$

или

$$pV = nkT, \qquad (85)$$

где

$$k = \frac{R}{N}. \qquad (86)$$

Так как R и N не зависят от рода газа, то число k есть некоторая константа. Она равна

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \quad \text{дж/град}$$

и называется *постоянной Больцмана*. Таким образом, уравнение состояния идеального газа можно представить в виде (85). Существенной особенностью этого уравнения является то, что оно не содержит величин, характеризующих род газа.

Из уравнения (85) следует, что число молекул, содержащихся в единице объема идеального газа, зависит лишь от температуры и давления.

Абсолютная температура идеального газа зависит только от средней кинетической энергии его молекул и пропорциональна ей. Таким образом,

$$T \sim \frac{mv^2}{2}, \qquad (88)$$

где m — масса молекулы газа, а v— ее средняя скорость. Из соотношения (88) следует, что средняя скорость молекул пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры.

346. Где больше атомов: в стакане воды или в стакане ртути?

347. Вообразим, что мы как-то пометили все молекулы в стакане воды и вылили эту воду в Мировой океан. Если затем перемешать воду в океане и зачерпнуть из него один стакан воды, то как много будет в нем меченых молекул? В Мировом океане содержится примерно $13 \cdot 10^{17}$ *м*^{3} воды.

348. Вычислить массу молекулы воды.

349. Какой воздух тяжелей: сухой или сырой (при заданной температуре и заданном давлении)?

350. В сосуде объемом 60 *л* находится идеальный газ с температурой 27°C и давлением 10^5 *н/м*^{2}. Сколько в этом газе молекул?

351. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление почти до 10^{-10} *н/м*^{2}. Сколько молекул содержится в 1 *мм*^{3} газа при этом давлении и температуре 27°C?

352. После того как в комнате протопили печь, температура поднялась с 15 до 27°C. На сколько процентов уменьшилось число молекул в этой комнате?

353. Два сосуда, содержащие некоторые газы, соединены трубкой с краном. Давление в сосудах равно p_1 и p_2, а число молекул — n_1 и n_2. Каким будет давление в сосудах, если открыть кран соединительной трубки? (Температуру считать неизменяющейся.)

354. При 0°C молекулы кислорода имеют среднюю скорость 460 *м/сек*. Какова при этой температуре средняя скорость молекул азота?

355. При 0°C молекулы кислорода имеют среднюю скорость 460 *м/сек*. Какова средняя скорость молекул водорода при 100°C?

356. Доказать, что средняя скорость молекул газа пропорциональна $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, где p — давление газа, а ρ — его плотность.

357. Вычислить среднюю скорость атомов гелия при температуре 27°C. Удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме $c_V = 3140$ *дж/кг · град*.

358. При повышении температуры идеального газа на 150° средняя скорость его молекул увеличилась с 400 до 500 *м/сек*. На сколько нужно нагреть этот газ, чтобы увеличить среднюю скорость его молекул с 500 до 600 *м/сек*?

359. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средняя скорость молекул равна 400 *м/сек*, а во втором — 500 *м/сек*. Какой будет эта скорость, если открыть кран, соединяющий сосуды? (Теплообмен с окружающей средой отсутствует.)

360. В закрытом сосуде находится идеальный газ. Как изменится его давление, если средняя скорость его молекул увеличится на 20%?

§ 18. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Поверхностный слой жидкости подобен растянутой резиновой пленке. «Упругость» этого слоя характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения, который зависит от рода жидкости и ее температуры. (Но не зависит от величины поверхности. В этом отношении поверхностный слой жидкости существенно отличается от резиновой пленки.)

Поверхностное натяжение порождает разницу в давлениях вблизи искривленной поверхности жидкости. Если эта поверхность сферическая, то

$$|p_A - p_B| = \frac{2\sigma}{R}, \tag{89}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, p_A — давление в жидкости и p_B — давление в атмосфере, окружающей жидкость. Если жидкость имеет форму, показанную на рис. 128, то $p_A > p_B$,

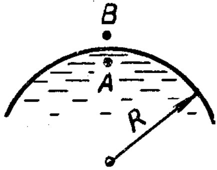


Рис. 128

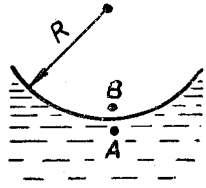


Рис. 129

а если ее форма такова, как на рис. 129, то $p_A < p_B$. (Со стороны выпуклости давление меньше, а со стороны вогнутости — больше.)

Поверхностный слой жидкости обладает так называемой поверхностной энергией

$$W = \sigma S, \tag{90}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а S — площадь слоя.

Форма жидкости вблизи ее контакта с твердым телом зависит от характера смачивания. Смачивающая жидкость принимает форму, показанную на рис. 130, а несмачивающая — показанную на рис. 131. Угол θ называется краевым. В случае полного смачивания или полного несмачивания он равен нулю.

Высота поднятия жидкости в вертикальной капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r\rho g}, \tag{91}$$

где θ — краевой угол, r — радиус трубки и ρ — плотность жидкости. Если угол θ мал (вода — стекло), то $\cos\theta \approx 1$, и

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g}. \tag{92}$$

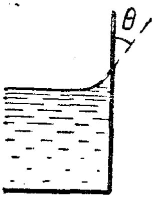


Рис. 130

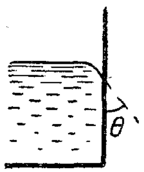


Рис. 131

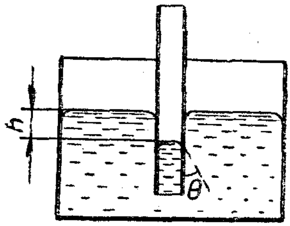


Рис. 132

Несмачивающая жидкость устанавливается в капилляре так, как показано на рис. 132. В этом случае формула (91) дает не высоту жидкости, а глубину.

В СИ коэффициент поверхностного натяжения измеряется в *н/м*, или, что то же самое, в *дж/м*^{2}.

361. Мыльный пузырь имеет радиус $R = 2$ *см*. Какова разница между давлением воздуха внутри пузыря и снаружи? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора считать равным 0,07 *н/м*.

362. Дно стеклянной банки имеет отверстие диаметром $D = 1$ *мм*. До какой высоты можно налить в банку ртуть, чтобы она не выливалась? Коэффициент поверхностного натяжения ртути 0,47 *н/м*, а ее плотность 13 600 *кг/м*^{3}.

363. Как изменится формула $h = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r\rho g}$, если сосуд с жидкостью будет установлен в лифте, поднимающемся с ускорением $a = g$?

364. В сосуд с водой опущены две капиллярные трубки разных диаметров. В более широкой трубке вода поднялась на высоту h_1, а в более узкой — на высоту h_2. На сколько поднимется вода в узкой трубке, если вставить ее в широкую?

365. В капиллярной трубке вода поднялась на высоту h. Зная атмосферное давление p_0, найти давление в воде на высоте $h/2$. (Высоты отсчитываются от поверхности воды в сосуде.)

366. В вертикальной капиллярной трубке радиусом r находится жидкость (рис. 133). Коэффициент ее поверхностного натяжения равен σ, а краевой угол равен θ. Найти разность давлений в точках A и B.

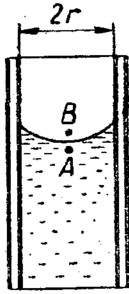


Рис. 133

367. Барометрическая трубка с внутренним диаметром 1 *мм* погружена в чашку с ртутью. Какое давление покажет трубка, когда атмосферное давление будет 760 *мм рт. ст.*? Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен 0,47 *н/м*, ее плотность равна 13 600 *кг/м*^{3}, краевой угол ртути в стеклянной трубке равен 40°.

368. Трубка с внутренним диаметром 1 *мм* опущена в ртуть на глубину 5 *мм* (рис. 134). Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен 0,47 *н/м*, а ее плотность равна 13 600 *кг/м*^{3}. Найти угол α.

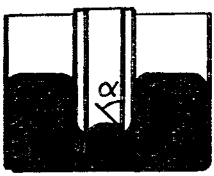


Рис. 134

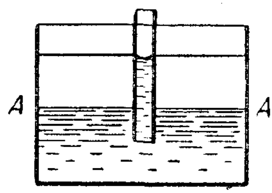


Рис. 135

369. Капиллярную трубку опустили в сосуд с водой, а затем на поверхность воды налили масла (рис. 135). Какова высота слоя масла, если известно, что его уровень совпадает с уровнем воды в трубке? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен 0,073 *н/м*, плотность масла равна 0,9 *г/см*^{3}, радиус трубки равен 1 *мм*. (Краевой угол считать равным нулю.)

370. Левое колено U-образной капиллярной трубки имеет радиус 0,5 *мм*, а правое — 1 *мм*. Какова разность уровней воды в этой трубке? (Коэффициент поверхностного натяжения воды равен 0,073 *н/м*, краевой угол равен нулю.)

371. Капля ртути лежит на горизонтальной плоскости, не смачивая ее. Каким должен быть размер капли, чтобы ее форма была близка к сферической? Принять, что для этого гидростатическое давление в капле должно быть не больше 10% от давления, созданного поверхностным слоем. (Плотность ртути равна 13 600 *кг/м*^{3}, а ее коэффициент поверхностного натяжения — 0,47 *н/м*.)

372. Восемь шаровых капель ртути диаметром 1 *мм* каждая сливаются в одну каплю. Сколько при этом выделится тепла?

373. Шаровую каплю ртути диаметром 1 *мм* поместили между двумя пластинками и расплющили до толщины 0,05 *мм*. Какая при этом была совершена работа?

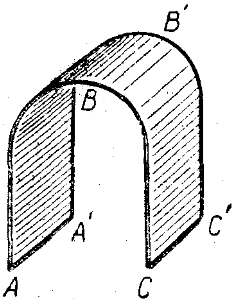


Рис. 136

374. Из тонкой проволоки изготовлена подковообразная рамка $ABCC'B'A'A$ (рис. 136). Если образовать на ней мыльную пленку, то силы поверхностного натяжения, действующие на рамку на участках ABC и $A'B'C'$, будут горизонтальны и взаимно уничтожатся, а силы, действующие на рамку на участках AA' и CC', будут направлены вверх. Следовательно, если рамка будет достаточно легкой, она взлетит.

Указать ошибку в этом рассуждении.

§ 19. НАСЫЩАЮЩИЕ И НЕНАСЫЩАЮЩИЕ ПАРЫ

Насыщающим называется пар, находящийся в тепловом равновесии со своей жидкостью. Давление и плотность насыщающего пара зависят только от его температуры (для пара данного вещества).

В диапазоне средних температур и давлений пар (насыщающий и ненасыщающий) можно рассматривать как идеальный газ и применять к нему уравнение $pV = \frac{m}{\mu} RT$. Однако следует помнить, что при изменении температуры или объема насыщающего пара изменяется также и его масса m (вследствие испарения или конденсации).

Воздух, содержащий водяной пар, называется влажным. Абсолютной влажностью воздуха называется плотность содержащегося в нем водяного пара (ее обычно выражают в $г/м^3$). Относительной влажностью воздуха называется отношение плотности содержащегося в нем пара к плотности этого пара в состоянии насыщения (т. е. к плотности насыщающего пара воды при рассматриваемой температуре). Относительную влажность выражают в процентах. Из закона Менделеева—Клапейрона следует, что она равна отношению парциального давления водяного пара к давлению этого пара в состоянии насыщения.

375. Число молекул, которыми ежесекундно обмениваются при комнатной температуре вода и ее пар, составляет около 10^{21} на 1 $см^2$ поверхности. Предположим, что все покидающие воду молекулы немедленно удаляются от ее поверхности, а температура испаряющейся воды остается неизменной. За какое время испарился бы тогда стакан воды при комнатной температуре? (Объем стакана — 200 $см^3$, а площадь его поперечного сечения — 40 $см^2$.)

376. Какова плотность насыщающего пара воды при температуре 100°C?

377. Таблицы показывают, что если давление насыщающего пара воды выражать в *мм рт. ст.*, а его плотность — в $г/м^3$, то при температурах, не сильно отличающихся от комнатной, эти величины близки друг к другу. Доказать это. (Использовать решение задачи 304.)

378. В сосуде объемом 10 *л* находится сухой воздух при температуре 0°С и давлении 760 *мм рт. ст.* Каким будет давление в этом сосуде, если ввести туда 3 *г* воды и нагреть сосуд до 100°С? (Воспользоваться значением R, полученным при решении задачи 304.)

379. Найти абсолютную влажность воздуха, зная, что содержащийся в нем водяной пар имеет парциальное давление $14 \cdot 10^3$ *н/м*^{2}, а температура воздуха равна 60°С.

380. Воздух имеет температуру 60°С и абсолютную влажность 50 *г/м*^{3}. Какой будет абсолютная влажность этого воздуха, если температура понизится до 10°С? Известно, что при 10° С давление насыщающего пара воды равно 1230 *н/м*^{2}.

381. В комнате объемом 40 *м*^{3} воздух имеет температуру 20°С и относительную влажность 20%. Сколько нужно испарить в этой комнате воды, чтобы относительная влажность достигла 50%? Известно, что при 20°С давление насыщающих паров воды равно 2330 *н/м*^{2}.

382. При температуре $t = 20$°С и давлении $p = 760$ *мм рт. ст* $\approx$ $\approx 10^5$ *н/м*^{2} воздух имеет влажность 100%. На сколько процентов он легче сухого воздуха той же температуры и с тем же давлением? Молекулярная масса сухого воздуха равна 29 *кг/кмоль*, а давление насыщающего пара воды при 20°С равно 2330 *н/м*^{2}.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

§ 20. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Закон Кулона, напряженность, потенциал

Сила взаимодействия точечных зарядов Q_1 и Q_2 равна

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{93}$$

где r — расстояние между зарядами, а k — коэффициент, зависящий от единиц измерения (закон Кулона). В СИ этот коэффициент записывают в виде $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, и формула (93) принимает вид:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{94}$$

где ε_0 — так называемая электрическая постоянная, численно равная

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ ф/м. \tag{95}$$

Формулы (93) и (94) относятся к взаимодействию в вакууме. Если же заряды Q_1 и Q_2 находятся в некоторой среде, то в знаменатели этих формул вводится безразмерный множитель ε. Поэтому в СИ

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \tag{96}$$

где ε — *диэлектрическая проницаемость данной среды*. Формулы (93), (94) и (96) верны и для силы взаимодействия двух равномерно заряженных шаров. В этом случае r означает расстояние между их центрами.

Напряженностью электрического поля в какой-либо точке C называется величина, измеряемая отношением

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \tag{97}$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на точечный заряд Q, помещенный в точку C. Если поле создано точечным зарядом или равномерно заряженным шаром, то

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \tag{98}$$

где r — расстояние рассматриваемой точки от центра шара или от точечного заряда. Если этот шар полый, то внутри него электрическое поле отсутствует.

Поле, созданное бесконечной равномерно заряженной плоскостью, однородно. Его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{99}$$

где σ — *поверхностная плотность заряда* (заряд, приходящийся на единицу площади).

Если электрическое поле получается в результате суперпозиции (наложения) нескольких электрических полей, то

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \tag{100}$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ — напряженности, создаваемые отдельными полями, а $\vec{E}$ — напряженность суммарного поля.

Потенциалом электрического поля в точке C называется величина, измеряемая отношением

$$\varphi = \frac{A}{Q}, \tag{101}$$

где A — работа, совершаемая полем при перемещении заряда Q из точки C в бесконечность. Если поле создано точечным зарядом или равномерно заряженным шаром, то

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \tag{102}$$

где r — расстояние данной точки от центра шара или от точечного заряда. Для полого шара потенциал всех его внутренних точек одинаков и определяется равенством (102), в котором r — радиус шара.

Если электрическое поле однородно и точки *1* и *2* лежат на одной силовой линии, то

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = Ed, \tag{103}$$

где d — расстояние между точками *1* и *2*.

Точечный заряд Q, находящийся в какой-либо точке электрического поля, обладает потенциальной энергией

$$W = Q\varphi, \tag{104}$$

где φ — потенциал этой точки.

Работа, совершаемая полем при перемещении точечного заряда Q из положения *1* в положение *2*, равна уменьшению потенциальной энергии этого заряда, т. е.

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{105}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы точек *1* и *2*.

Если электрическое поле получается в результате суперпозиции нескольких полей, то

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n, \tag{106}$$

где φ_1, φ_2, ..., φ_n — потенциалы данной точки в каждом из отдельных полей, а φ — потенциал этой точки в суммарном поле.

В СИ заряд измеряется в кулонах (*к*), потенциал — в вольтах (*в*) и напряженность — в вольтах на метр (*в/м*), или, что то же самое, в ньютонах на кулон (*н/к*).

(Если при решении задачи числовое значение коэффициента пропорциональности несущественно, то формулы (94) и (96) можно писать в форме (93), формулу (98) — в виде $E = k\dfrac{Q}{r^2}$, формулу (99) — в виде $E = k\sigma$ и формулу (102) — в виде $\varphi = k\dfrac{Q}{r}$.)

383. Наглядное представление о заряде в 1 *к* дает сила, с которой взаимодействуют два таких заряда, находясь на расстоянии 1 *км*. Вычислите эту силу.

384. Заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, а его масса — $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*. Что больше: сила электростатического взаимодействия электронов или сила их гравитационного взаимодействия? Во сколько раз?

385. О соотношении между зарядом электрона и его массой можно судить по следующему примеру. Вообразим, что два заряда, каждый из которых состоит из одного грамма электронов, находятся на расстоянии 100 млн. *км*. С какой силой они взаимодействуют? (Заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, а его масса — $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*.)

386. Каков заряд всех электронов, находящихся в куске меди массой 1 *кг*? За какое время проходит такой заряд через лампочку карманного фонаря? (Заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, ток, потребляемый лампочкой карманного фонаря, равен 0,28 *а*.)

387. При напряженности $3 \cdot 10^6$ *в/м* воздух перестает быть надежным изолятором и в нем происходит искровой разряд. Каким должен быть радиус шара, чтобы на нем мог удержаться заряд в 1 *к*?

388. В точке A напряженность поля равна 36 *в/м*, а в точке B — 9 *в/м* (рис. 137). Найти напряженность в точке C, лежащей посередине между точками A и B.

389. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами (рис. 138). Найти напряженность в точках O, A, B, зная, что заряды сфер равны Q_1 и Q_2, а расстояния OA и OB равны l_1 и l_2.

390. Бесконечные плоскости *1* и *2* параллельны друг другу и заряжены положительным электричеством с одинаковой плотностью σ (рис. 139). Найти напряженность в точках A и B.

391. Равномерно заряженные пластины находятся на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 139). Найти плотности их за-

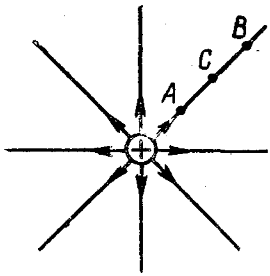


Рис. 137

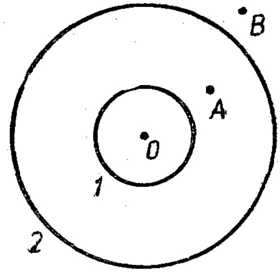


Рис. 138

рядов, зная, что $E_A = 3000$ *в/м* и $E_B = 1000$ *в/м*. (Точки A и B лежат вблизи пластин.)

392. Электрон, летящий со скоростью v_0, попадает в однородное поле заряженного конденсатора и вылетает из него под углом α (рис. 140). Найти напряженность поля конденсатора, зная длину l, массу электрона m и его заряд e.

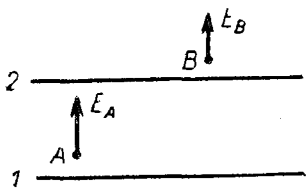


Рис. 139

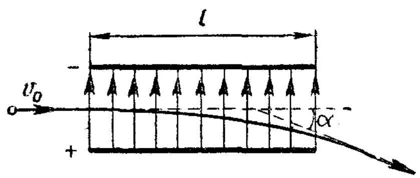


Рис. 140

393. Медный шар имеет радиус 10 *см* и массу 1 *кг*. Какую часть электронов надо было бы из него удалить, чтобы зарядить его до потенциала 100 *млн. в*?

394. Потенциалы точек A и B равны 30 *в* и 20 *в* (рис. 137). Найти потенциал точки C, лежащей посередине между точками A и B.

395. Полый шар с центром O равномерно заряжен электричеством. В центре шара потенциал равен 100 *в*, а в точке A ($OA = 30$ *см*) потенциал равен 50 *в*. Каков радиус шара?

396. Полый шар равномерно заряжен электричеством. Найти плотность его заряда как функцию радиуса и потенциала шара.

397. Неподвижно закрепленный шарик заряжен положительно и находится над шариком, заряженным отрицательно. Заряды шариков одинаковы, масса каждого равна 0,01 *г*, радиус — 1 *мм* и расстояние между центрами — 20 *мм*. Какой должна быть разность их потенциалов, чтобы верхний шарик мог поднять нижний?

398. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами (рис. 138). Найти потенциал точек O, A, B, зная, что заряды сфер равны Q_1 и Q_2, их радиусы равны R_1 и R_2, а расстояния OA и OB равны l_1 и l_2.

399. Бесконечные плоскости *1* и *2* параллельны друг другу и заряжены с одинаковой плотностью σ (рис. 139). Зная расстояния точек A и B от плоскостей, найти разность потенциалов между этими точками.

400. Решить предыдущую задачу в случае, когда точка A лежит под плоскостью *1*.

401. Точка B вдвое дальше от центра поля, чем точка A (рис. 137). При перемещении заряженной частицы от точки A к точке B поле совершило работу 6 *дж*. Какую работу совершило оно на первой половине этого пути?

402. На поверхности шара радиусом 2 *см* равномерно распределен положительный заряд 10^{-10} *к*. Электрон, находящийся очень далеко от шара, имеет начальную скорость $v_0 = 0$. С какой скоростью подойдет он к шару? (Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*, а его заряд $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.)

403. Точечные заряды Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Какова потенциальная энергия этой системы?

404. Два электрона движутся под действием сил электростатического отталкивания. Какую скорость будут они иметь, когда расстояние между ними станет бесконечно большим? В начальный момент электроны находились на расстоянии 1 *см* друг от друга и имели скорость, равную нулю.

405. Точечные заряды Q_1, Q_2, Q_3 расположены в вершинах правильного треугольника со стороной l. Какова потенциальная энергия этой системы?

406. Какую скорость приобрели бы электроны, о которых говорится в задаче 404, если бы их было не два, а три?

407. Энергию быстрых частиц часто выражают в электронвольтах (*эв*). Электронвольт — это энергия, которую приобретает электрон, пройдя в электрическом поле разность потенциалов 1 *в*. Выразить электронвольт в джоулях.

2. Проводники в электрическом поле

Заряд проводника находится только на его поверхности. Во внутренних точках проводника нет ни зарядов, ни электрического поля (т. е. равна нулю как объемная плотность заряда, так и напряженность поля). Это верно как для проводника, которому был сообщен некоторый заряд, так и для проводника, на котором находятся только индуцированные заряды.

Все точки проводника, как лежащие на его поверхности, так и внутренние, имеют один и тот же потенциал. Его называют потенциалом проводника.

Если проводник полый и в области, которую он охватывает, нет заряженных тел, то все точки этой области имеют один и тот же потенциал — такой же, как потенциал самого проводника. Электрическое поле в этой области отсутствует.

При соединении двух проводников положительные заряды движутся от проводника с бо́льшим потенциалом к проводнику с меньшим потенциалом (а отрицательные — в противоположном направлении). Это движение продолжается до тех пор, пока потенциалы проводников не станут одинаковыми.

408. Полый металлический шар A, имеющий небольшое отверстие, заряжен положительно (рис. 141). Как известно, на внут-

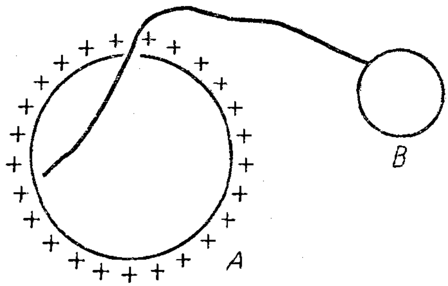


Рис. 141

ренней поверхности этого шара заряды отсутствуют. Зарядится ли металлический шар B, если соединить его проволокой с внутренней поверхностью шара A?

409. Проводники A и B были заряжены положительно: первый до потенциала 10 *в*, а второй — до потенциала 20 *в*. Затем заряд проводника A стали неограниченно увеличивать, однако его потенциал все время оставался меньше, чем потенциал проводника B. Как расположены эти проводники?

410. Расстояние между двумя металлическими шарами велико по сравнению с их размерами. Первый шар имеет радиус R_1 и заряжен до потенциала φ_1, а второй имеет радиус R_2 и заряжен до потенциала φ_2. Каким будет потенциал этих шаров, если соединить их тонкой проволокой?

411. Металлические шары, заряженные одинаковым количеством электричества, имеют потенциалы 20 *в* и 30 *в*. Каким будет потенциал этих шаров, если соединить их проволокой? (Расстояние между шарами велико по сравнению с их радиусами.)

412. Решить предыдущую задачу, считая, что шары заряжены разным количеством электричества, но имеют одинаковую плотность заряда.

413. Медный шар A заряжен положительно, а медный шар B не заряжен. Шары имеют одинаковые размеры и почти касаются друг друга. После того как их соединили проволокой, заряд шара A уменьшился вдвое. Во сколько раз уменьшился его потенциал?

414. В однородное электрическое поле с напряженностью E внесли металлическую пластинку (рис. 142). Какой заряд индуцируется на каждой ее стороне? Площадь пластинки равна S.

415. Две параллельные металлические пластинки расположены на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 143). Какие заряды будут индуцированы на поверхностях пластинки *2*, если сообщить пластинке *1* положительный заряд Q?

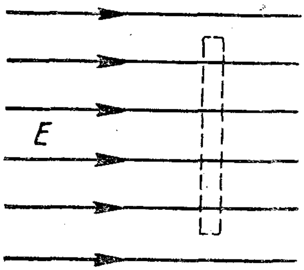


Рис. 142

Рис. 143

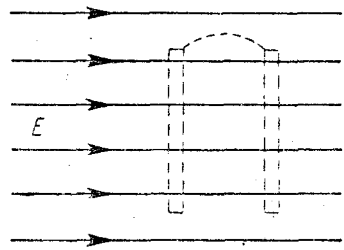


Рис. 144

416. Пластинке *1* на рис. 143 сообщили положительный заряд $Q_1 = 0{,}002$ *к*, а пластинке *2* — положительный заряд $Q_2 = 0{,}004$ *к*. Какие заряды находятся на сторонах пластинки *2*?

417. Два полых металлических шара расположены концентрично один в другом. Каждому шару сообщают положительный заряд $Q = 0{,}002$ *к*. Какие заряды находятся на наружной и на внутренней поверхностях большего шара?

418. В однородное электрическое поле внесли две параллельные металлические пластинки, соединенные проволокой (рис. 144). Напряженность поля равна E, а площадь каждой пластинки равна S. Найти величину зарядов, индуцированных на пластинках.

419. Металлическая сфера, имеющая небольшое отверстие, заряжена положительным зарядом Q (рис. 145). Металлические шарики A и B соединены проволокой и расположены, как показано на рисунке. Радиус сферы равен R, радиус каждого шарика равен r, расстояние AB в десятки раз больше R. Найти заряды, индуцированные на шариках.

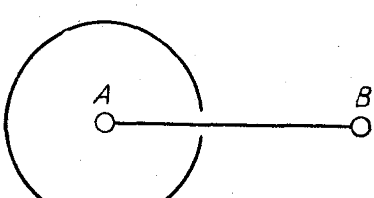


Рис. 145

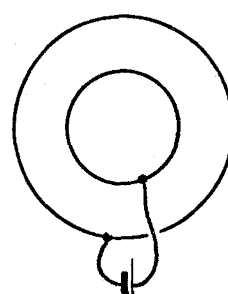


Рис. 146

420. Элемент с э.д.с. E присоединен к металлическим шарам, как показано на рис. 146. Найти заряд каждого шара, зная, что радиус большего шара равен R, меньшего — r.

421. К элементу с э.д.с. E присоединены металлические шарики A и B радиусом r каждый (рис. 147). Найти их заряды, считая $r \ll AB$.

Рис. 147

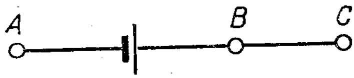


Рис. 148

422. Шарики A, B, C присоединены к элементу с э.д.с. E (рис. 148). Радиус каждого шарика равен r, расстояния AB и BC велики по сравнению с r. Найти заряды шариков.

3. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

Емкостью уединенного проводника называется величина, измеряемая отношением

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \tag{107}$$

где Q — заряд проводника, а φ — его потенциал. Она зависит от размеров и формы проводника, а также от среды, в которой проводник находится.

Емкость шара равна

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \tag{108}$$

Если шар находится в пустоте (практически, в воздухе), то

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{109}$$

Емкостью конденсатора называется величина, измеряемая отношением

$$C = \left|\frac{Q}{U}\right|, \tag{110}$$

где Q — заряд одного из проводников, составляющих конденсатор, а U — разность потенциалов между ними. (Проводники, образующие конденсатор, заряжены одинаковым количеством электричества противоположных знаков.)

Емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{111}$$

где S — площадь каждой пластины конденсатора, а d — расстояние между ними.

Уединенный заряженный проводник обладает энергией электрического поля, созданного этим проводником. Она равна

$$W = \frac{Q\varphi}{2}. \qquad (112)$$

Учитывая формулу (107), можно написать:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}, \qquad (113)$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (114)$$

Энергия конденсатора (энергия поля конденсатора) равна

$$W = \frac{|QU|}{2}, \qquad (115)$$

или с учетом выражения (110)

$$W = \frac{CU^2}{2}, \qquad (116)$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (117)$$

В СИ емкость измеряется в фарадах (*ф*). Миллионная доля фарады называется микрофарадой (*мкф*).

423. Каким должен быть радиус шара, чтобы его емкость (в вакууме) равнялась 1 *ф*?

424. Плоский конденсатор (без диэлектрика) образован двумя квадратными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии 1 *мм*. Какой должна быть ширина каждой из этих пластин, чтобы емкость конденсатора равнялась 1 *ф*?

425. Проводник емкостью C_1 и проводник емкостью C_2 удалены на очень большое расстояние друг от друга и от прочих тел. Какова емкость конденсатора, образованного этими проводниками?

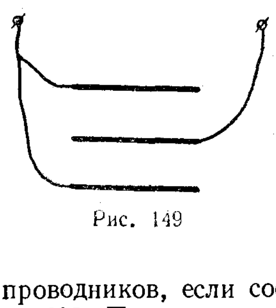


Рис. 149

426. Найти емкость конденсатора (рис. 149). Площадь каждой пластины равна S, а расстояние между пластинами равно d.

427. Проводник емкостью C_1 заряжен до потенциала φ_1, а проводник емкостью C_2 — до потенциала φ_2. Проводники удалены на очень большое расстояние друг от друга. Каким будет потенциал этих проводников, если соединить их проволокой?

428. Проводники, заряженные одинаковым количеством электричества, имеют потенциалы $\varphi_1 = 40$ *в* и $\varphi_2 = 60$ *в*. Каким будет потенциал этих проводников, если соединить их проволокой? (Расстояние между проводниками велико по сравнению с их размерами.)

429. Проводник емкостью $C_1 = 10^{-5}$ *мкф* заряжен до потенциала $\varphi_1 = 6000$ *в*, а проводник емкостью $C_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ *мкф* — до потенциала $\varphi_2 = 12\,000$ *в*. Расстояние между проводниками велико по сравнению с их размерами. Какое количество тепла выделится при соединении этих проводников проволокой?

430. Два одинаковых шара удалены на очень большое расстояние друг от друга. Поле первого шара обладает энергией 0,0016 *дж*, а поле второго — энергией 0,0036 *дж*. Какое количество тепла выделится при соединении этих шаров проволокой?

431. Плоский воздушный конденсатор имеет емкость C и заряжен до разности потенциалов U. Какую работу надо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между его обкладками?

432. Между обкладками плоского конденсатора находится пластинка из диэлектрика. Емкость конденсатора равна C, его заряд равен Q, диэлектрическая проницаемость материала пластинки равна ε. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить пластинку из конденсатора? (Трение между удаляемой пластинкой и обкладками конденсатора не учитывать.)

433. Емкость плоского воздушного конденсатора равна C. Одна из его обкладок имеет заряд Q, а другая не заряжена. Какова разность потенциалов между обкладками конденсатора?

434. Пластины плоского воздушного конденсатора имеют заряды $+Q$ и $-Q$. Как изменится сила взаимодействия этих пластин, если расстояние между ними увеличить в три раза?

435. Решить предыдущую задачу, считая, что пластины конденсатора присоединены к батарее аккумуляторов.

436. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится пластинка из диэлектрика, присоединен к аккумулятору. Заряд конденсатора равен Q, а диэлектрическая проницаемость материала пластинки равна ε. Какой заряд пройдет через аккумулятор при удалении пластинки?

4. Конденсаторные цепи

Если несколько конденсаторов соединены параллельно, то

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n, \tag{118}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n, \tag{119}$$

где C — емкость батареи, а Q — суммарный заряд батареи.

Если несколько конденсаторов соединены последовательно, то

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}, \tag{120}$$

где C — емкость батареи. При этом

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n, \tag{121}$$

т. е. заряды всех конденсаторов одинаковы.

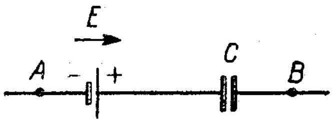


Рис. 150

Если на участке AB имеется конденсатор и источник э.д.с. (рис. 150), то заряд конденсатора равен

$$Q = C\,(E + \varphi_A - \varphi_B), \tag{122}$$

что можно записать в виде

$$Q = C\,(E + U), \tag{123}$$

где E — э.д.с. источника, а $\varphi_A - \varphi_B = U$—разность потенциалов между концами участка. Если источник э.д.с. отсутствует, то $E = 0$ и

$$Q = C\,(\varphi_A - \varphi_B), \tag{124}$$

$$Q = CU. \tag{125}$$

Выражения (122), (123) показывают, что заряд конденсатора вызывается двумя факторами: э.д.с. E и напряжением $U = \varphi_A - \varphi_B$. Это обстоятельство облегчает правильную расстановку знаков в каждом конкретном случае. Например, если э.д.с. E направлена так, как показано на рис. 150, и $\varphi_A > \varphi_B$, то удобно пользоваться формулой (122) или (123). В этом случае разность потенциалов $U = \varphi_A - \varphi_B$ направлена в ту же сторону, что э.д.с. E, и «помогает» ей. Если же $\varphi_A < \varphi_B$, то заряд конденсатора удобнее записывать в виде

$$Q = C\,[E - (\varphi_B - \varphi_A)], \tag{126}$$

или

$$Q = C\,(E - U), \tag{127}$$

где $\varphi_B - \varphi_A = U$ — число положительное. В этом случае разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A$ направлена в сторону, противоположную э.д.с. E, и «противодействует» ей. Если, кроме того, $\varphi_B - \varphi_A > E$, то можно пользоваться записью

$$Q = C\,(\varphi_B - \varphi_A - E), \tag{128}$$

или

$$Q = C\,(U - E). \tag{129}$$

Легко видеть, что каждое из рассмотренных равенств дает одну и ту же величину заряда Q. Что касается его знака, то он определяется правилом: поле между обкладками конденсатора направлено в ту сторону, в которую «действует» сумма $E + \varphi_A - \varphi_B$. Например, для случая, показанного на рис. 150, при $\varphi_A > \varphi_B$ поле конденсатора направлено вправо, т. е. левая обкладка конденсатора заряжена положительно, а правая — отрицательно. Если же э.д.с. E направлена вправо, но $\varphi_A < \varphi_B$ и $\varphi_B - \varphi_A > E$, то поле конденсатора направлено влево, т. е. левая обкладка заряжена отрицательно, а правая — положительно.

Если потенциалы φ_A и φ_B заранее неизвестны и, следовательно, неизвестно, какой из них больше, то следует выбрать один из возможных вариантов (например, $\varphi_A > \varphi_B$) и исходить из него при записи соответствующих равенств.

Если несколько конденсаторов и несколько источников э.д.с. соединены последовательно (рис. 151), то заряд каждого конденсатора (они одинаковы) определяется равенством

$$Q = C\,(\Sigma E_k \pm \varphi_A - \varphi_B), \tag{130}$$

где C — общая емкость конденсаторов, вычисляемая по формуле (120), а ΣE_k — алгебраическая сумма всех

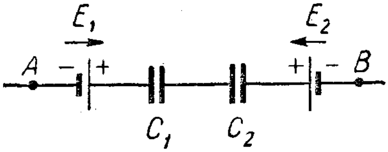


Рис. 151

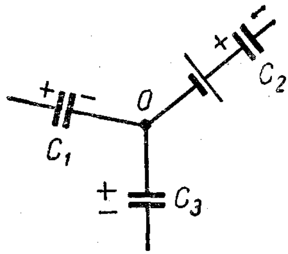


Рис. 152

э.д.с. Например, в случае, показанном на рис. 151,

$$Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,(E_1 - E_2 + \varphi_A - \varphi_B).$$

К выражению (130) применимы те же соображения о знаках, которые были высказаны относительно формулы (122).

Если несколько участков, содержащих конденсаторы, сходятся в одной точке (рис. 152), то

$$\Sigma Q_k = 0, \tag{131}$$

где ΣQ_k — *алгебраическая* сумма зарядов на обкладках, примыкающих к этой точке. Например, для случая, представленного на рис. 152,

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — алгебраические значения зарядов на обкладках, примыкающих к узлу O (на правой обкладке конденсатора C_1, на левой обкладке конденсатора C_2 и на верхней обкладке конденсатора C_3). Соотношение (131) справедливо и тогда, когда перед конденсаторами имеются источники э.д.с. (на рис. 152 — перед конденсатором C_2).

Если символами Q_k обозначать не алгебраическую величину зарядов, а *абсолютную*, то равенство (131) примет вид:

$$\Sigma Q_i = \Sigma Q_j, \tag{132}$$

где ΣQ_i—сумма положительных зарядов, а ΣQ_j—сумма абсолютных величин отрицательных зарядов. Например, для рассматриваемого случая (рис. 152)

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

(ибо к узлу O примыкает отрицательный заряд конденсатора C_1 и положительные заряды конденсаторов C_2 и C_3). В несложных цепях такая форма записи удобней.

Расчет многих конденсаторных цепей можно провести с помощью формул для параллельного и последовательного соединения конденсаторов. В более сложных случаях следует выразить все заряды через потенциалы узловых точек и записать равенства (131) или (132). Полученная система уравнений позволит найти все потенциалы и, следовательно, все заряды. (См. задачи 451—454.)

437. Каковы емкости конденсаторных батарей, изображенных на рисунках 153 и 154?

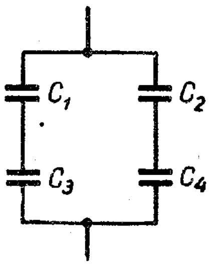


Рис. 153

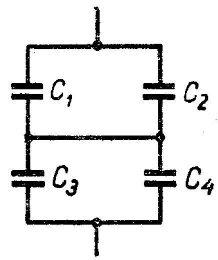


Рис. 154

438. Конденсатор емкостью 3 *мкф* заряжен до напряжения 300 *в*, а конденсатор емкостью 2 *мкф* — до 200 *в*. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Какая разность потенциалов установится между обкладками конденсаторов после соединения?

439. Решить предыдущую задачу, считая, что конденсаторы были соединены разноименными полюсами.

440. Какое количество тепла выделится в результате соединения конденсаторов, предложенного в задаче 438?

441. В некоторой цепи имелся участок, изображенный на рис. 155. Емкость конденсатора равна 10 *мкф*, его заряд равен $4 \cdot 10^{-5}$ *к* и э.д.с. источника равна 1 *в*. Найти разность потенциалов между точками A и B.

442. В цепи (рис. 156) $E_1 = 1$ *в*, $E_2 = 2$ *в*, $\varphi_A - \varphi_B = 3$ *в*, $C_1 = 20$ *мкф*, $C_2 = 30$ *мкф*, $C_3 = 60$ *мкф*. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

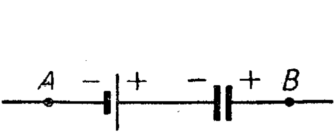


Рис. 155

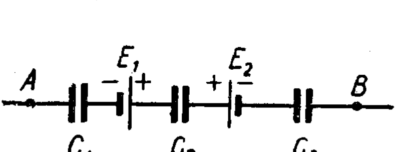


Рис. 156

443. В цепи (рис. 157) $E_1 = 1$ *в*, $E_2 = 2$ *в*, $C_1 = 10$ *мкф*, $C_2 = 20$ *мкф*. Найти заряд конденсатора C_2, зная, что заряд конденсатора C_1 равен 10^{-5} *к*.

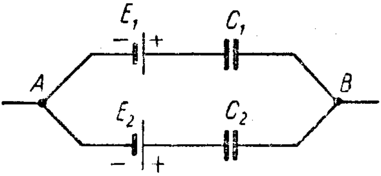


Рис. 157

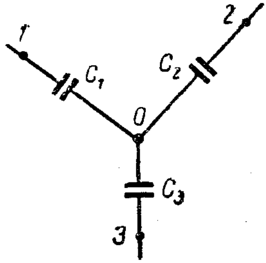


Рис. 158

444. В некоторой цепи имелся участок, показанный на рис. 158. Потенциалы точек *1*, *2*, *3* равны φ_1, φ_2, φ_3, а емкости конденсаторов равны C_1, C_2, C_3. Найти потенциал точки O.

445. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рис. 159.

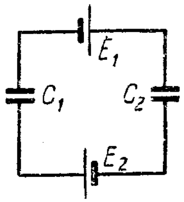


Рис. 159

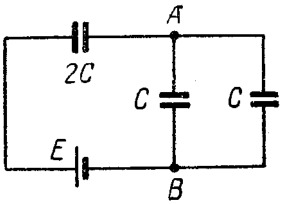


Рис. 160

446. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, изображенной на рис. 160.

447. В цепи (рис. 161) известны э.д.с. E и емкость C правого конденсатора. Кроме того, известно, что емкость каждого из двух других конденсаторов в сотни раз больше C. Найти заряд конденсатора C.

448. Каковы заряды конденсаторов в цепи, показанной на рис. 162?

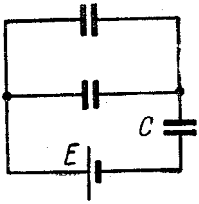


Рис. 161

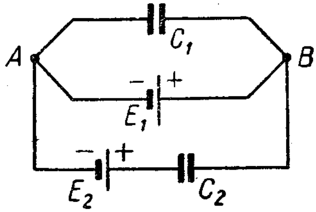


Рис. 162

449. В цепи (рис. 163) известны емкости C_1, C_2, C_3 и э.д.с. E. Кроме того, известно, что заряд первого конденсатора равен Q_1. Найти э.д.с. второго элемента.

450. Найти заряды конденсаторов в цепи, показанной на рис. 164.

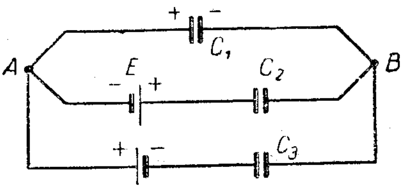


Рис. 163

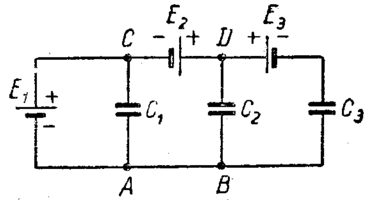


Рис. 164

451. Найти заряды конденсаторов в цепи, показанной на рис. 165.

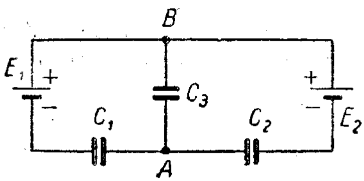


Рис. 165

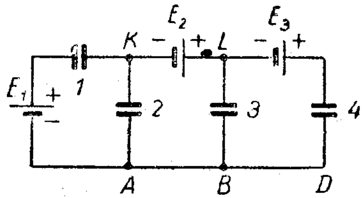


Рис. 166

452. Найти заряды конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 166. Емкость каждого конденсатора равна C.

453. Найти емкость батареи (рис. 167). Емкость каждого конденсатора равна C.

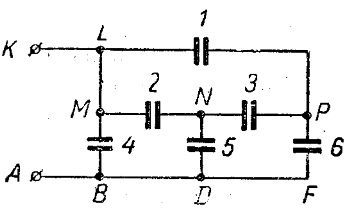


Рис. 167

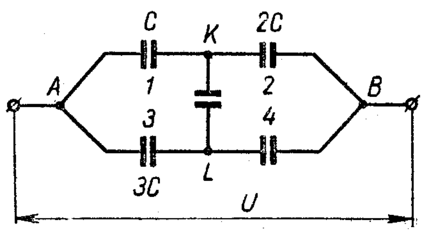


Рис. 168

454. Когда к батарее (рис. 168) подвели напряжение U, заряд среднего конденсатора оказался равным нулю. Какова емкость конденсатора 4?

§ 21. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

1. Закон Ома. Простейшие электрические цепи

Если на участке AB нет источников э.д.с. (рис. 169), то

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R}, \tag{133}$$

или

$$I = \frac{U}{R}, \tag{134}$$

где I — ток, протекающий по этому участку, R — его сопротивление и $\varphi_A - \varphi_B = U$—разность потенциалов между концами участка (напряжение на участке AB).

Если на участке AB имеется источник э.д.с. (рис. 170), то

$$I = \frac{E + \varphi_B + \varphi_A}{R}, \tag{135}$$

или

$$I = \frac{E + U}{R + r}, \tag{136}$$

где E — э.д.с. источника, а R — сопротивление участка AB. (Если источник э.д.с. имеет внутреннее сопротивление, его надо прибавить к сопротивлению R.)

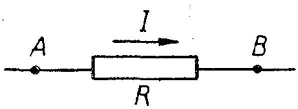


Рис. 169

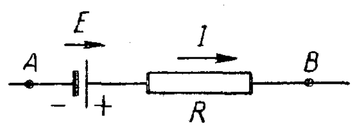


Рис. 170

Равенства (135), (136) показывают, что ток создается электродвижущей силой E и разностью потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$. Это обстоятельство позволяет правильно расставлять знаки в каждом конкретном случае. Например, если э.д.с. E направлена так, как показано на рис. 170, и $\varphi_A > \varphi_B$, то удобно пользоваться формулой (135). В этом случае э.д.с. E и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ направлены в одну сторону и «помогают» друг другу. Если же $\varphi_A < \varphi_B$ и $\varphi_B - \varphi_A < E$, то удобнее пользоваться равенством

$$I = \frac{E - (\varphi_B - \varphi_A)}{R}, \tag{137}$$

где $\varphi_B - \varphi_A = U$ — число положительное. В этом случае разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A$ «противодействует» электродвижущей силе E. Если, кроме того, $\varphi_B - \varphi_A > E$, то величина тока определится равенством

$$I = \frac{\varphi_B - \varphi_A - E}{R} \tag{138}$$

(э.д.с. E «противодействует» разности потенциалов $\varphi_B - \varphi_A$).

Если потенциалы φ_A и φ_B заранее неизвестны и поэтому неизвестно, какой из них больше, то следует выбрать один из возможных вариантов (например, $\varphi_A > \varphi_B$) и исходить из него при записи соответствующих равенств.

При последовательном соединении нескольких проводников их общее сопротивление

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \tag{139}$$

а при параллельном

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{140}$$

Из соотношения (140) следует, что при параллельном соединении двух проводников

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{141}$$

Если проводник однороден и имеет постоянное сечение, то

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{142}$$

где l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения и ρ — удельное сопротивление материала, из которого сделан проводник. При этом

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \tag{143}$$

где ρ — удельное сопротивление при температуре t°C, ρ_0 — при температуре 0°C и α — термический коэффициент сопротивления.

Если источник с э.д.с. E и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R, то

$$I = \frac{E}{R + r}, \tag{144}$$

где I — ток, протекающий через источник. Если $r \ll R$, то можно принять $r = 0$.

При расчете электрических цепей обычно не существенно, является ли данный источник гальваническим элементом, аккумулятором или динамо-машиной. (Важны лишь его э.д.с. и внутреннее сопротивление.) Поэтому на схемах источник э.д.с. часто обозначается так, как показано на рис. 171. (Стрелка указывает направление электродвижущей силы.) В задачах этого параграфа мы часто будем пользоваться таким обозначением.

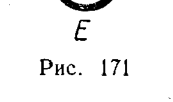


Рис. 171

455. По проводу протекает постоянный ток 10 *а*. Какова масса электронов, проходящих через поперечное сечение этого провода за год?

456. Нить холодной электролампы при температуре 0°C имеет сопротивление R_0, а сопротивление нити горящей электролампы при температуре 2400°С равно R. Вычислить отношение R/R_0, зная, что термический коэффициент сопротивления вольфрама равен $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$.

457. Внешняя цепь гальванического элемента составлена из трех сопротивлений (рис. 172). Найти ее сопротивление, зная, что $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ *ом*.

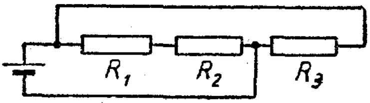


Рис. 172

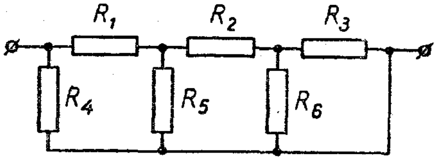


Рис. 173

458. В цепи (рис. 173) $R_1 = 3$ *ом*, $R_2 = 9$ *ом*, $R_3 = R_4 = R_6 = 6$ *ом*, $R_5 = 4$ *ом*. Найти сопротивление этой цепи.

459. Правильный проволочный октаэдр включен в цепь двумя противоположными вершинами. Найти его полное сопротивление, зная, что сопротивление каждого его ребра равно 1 *ом*.

460. Найти сопротивление цепи, изображенной на рис. 174.

461. Найти сопротивление проволочного тетраэдра, к двум вершинам которого подведено напряжение. Сопротивление каждого ребра тетраэдра равно r.

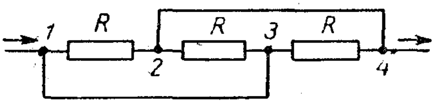


Рис. 174

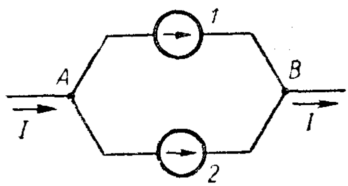


Рис. 175

462. В некоторой цепи имеется участок, показанный на рис. 175. Первый источник имеет э.д.с. $E_1 = 10$ *в* и внутреннее сопротивление $r_1 = 1$ *ом*, а второй — э.д.с. $E_2 = 12$ *в* и внутреннее сопротивление $r_2 = 4$ *ом*. Ток I равен 3 *а*. Найти токи, протекающие через источники.

463. В некоторой цепи имеется участок (рис. 176). $R_1 = 1$ *ом*, $R_2 = 2$ *ом*, $R_3 = 3$ *ом*, $\varphi_1 = 10$ *в*, $\varphi_2 = 9$ *в*, $\varphi_3 = 6$ *в*. Найти токи, протекающие через сопротивления R_1, R_2, R_3.

464. Найти заряд конденсатора (рис. 177). Считать $E_1 > E_2$.

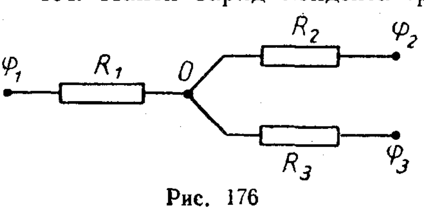


Рис. 176

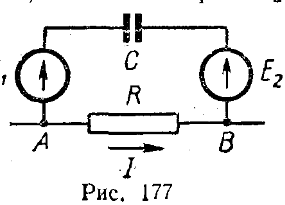


Рис. 177

465. Аккумулятор с э.д.с. 12 *в* и внутренним сопротивлением 1 *ом* заряжается током 3 *а*. Найти напряжение на клеммах аккумулятора.

466. Зависимость напряжения на клеммах аккумулятора от внешнего сопротивления R выражается равенством $U = \frac{15R}{2R+3}$. Найти э.д.с. аккумулятора и его внутреннее сопротивление.

467. Когда аккумулятор заряжали током 1*а*, напряжение на его клеммах равнялось 20 *в*, а когда тот же аккумулятор заряжали током 0,5 *а*, напряжение на его клеммах было равно 19 *в*. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление аккумулятора.

468. В цепи (рис. 178) все сопротивления одинаковы, а напряжение U постоянно. Уменьшатся ли токи, протекающие через сопротивления R_1 и R_2, если первое из них увеличить на 10%, а второе — на 30%?

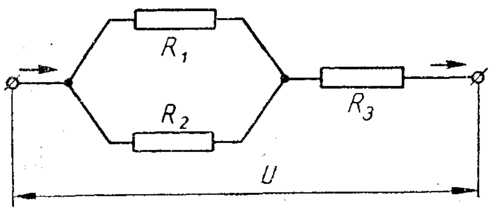


Рис. 178

469. Аккумулятор, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно замыкали на два разных сопротивления. Зная, что в первом случае ток был равен 3 *а*, а во втором — 6 *а*, найти ток, получающийся при замыкании аккумулятора на эти сопротивления, соединенные последовательно.

470. Когда внешнее сопротивление аккумулятора уменьшили на 20%, ток стал на 20% больше. На сколько процентов увеличился бы ток, если бы внешнее сопротивление уменьшили на 40%?

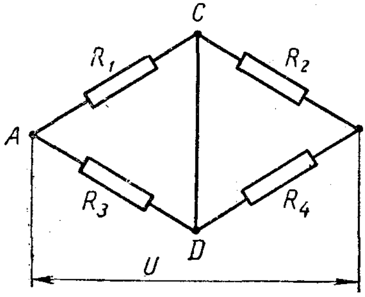


Рис. 179

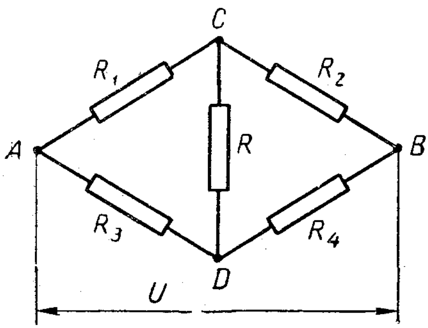


Рис. 180

471. Аккумулятор замкнули сначала на одно сопротивление, потом — на другое и затем — на оба, соединенные последовательно. В первом случае ток был равен 3 *а*, во втором—2 *а* и в третьем —1,5 *а*. Какой ток будет проходить через аккумулятор при параллельном соединении этих сопротивлений?

472. В цепи (рис. 179) $R_1 = 2$ *ом*, $R_2 = 3$ *ом*, $R_3 = 6$ *ом*, $R_4 = 7$ *ом*, $U = 36$ *в*. Найти ток на участке CD ($R_{CD} = 0$).

473. В цепи (рис. 180) $R_1 = 1$ *ом*, $R_2 = 2$ *ом*, $R_3 = 3$ *ом*. Найти сопротивление R_4, зная, что на участке CD нет тока.

474. В цепи (рис. 180) $R_1 = 2$ *ом*, $R_2 = 5$ *ом*, $R_3 = 20$ *ом*, $R_4 = 5$ *ом*, $U = 30$ *в*. Известно, что по сопротивлению R_2 протекает ток 4*а*. Найти сопротивление R.

475. Найти токи в цепи, изображенной на рис. 181. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

476. Найти сопротивление R_2 (рис. 182), зная, что $I_{AB} = 0$. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

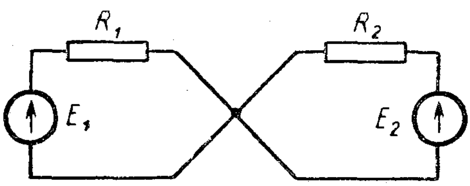


Рис. 181

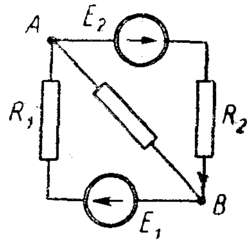


Рис. 182

477. В цепи (рис. 183) $R_1 = 10$ *ом*, $R_2 = 20$ *ом*, $R_3 = 30$ *ом*, $R_4 = 40$ *ом*, $E = 105$ *в*. Какой должна быть э.д.с. E', чтобы на участке CD не было тока? (Внутренние сопротивления источников считать равными нулю.)

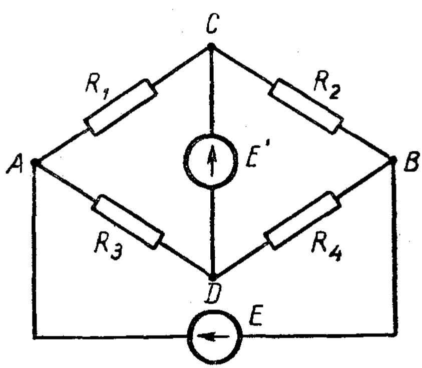


Рис. 183

2. Соединение источников э.д.с.

Если несколько источников э.д.с. соединены последовательно, то

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \tag{145}$$

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \tag{146}$$

где r и E — соответственно внутреннее сопротивление и э.д.с. полученной батареи. Сумма (146) является *алгебраической*, так как э.д.с., направленные в противоположные стороны (если такие есть), берутся с противоположными знаками.

Если несколько источников э.д.с. соединены параллельно, то

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}, \tag{147}$$

$$\frac{E}{r} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \ldots + \frac{E_n}{r_n}, \tag{148}$$

где r и E — соответственно внутреннее сопротивление и э.д.с. полученной батареи. (Формула (148), подобно формуле (146), является алгебраической.)

Если последовательно с источником E_k включено сопротивление R, его можно добавить к внутреннему сопротивлению этого источника (т. е. можно считать, что сопротивления R нет, а внутреннее сопротивление источника равно $r_k + R$).

Из формул (147), (148) следует, что при параллельном соединении источников с одной и той же э.д.с. E электродвижущая сила полученной батареи имеет ту же величину E.

Замечание. Э.д.с. E, определяемая формулой (148), не равна отношению $\frac{N}{I}$, где N — полная мощность батареи, а I — протекающий через нее ток. Следовательно, эта э.д.с. не является электродвижущей силой батареи *в буквальном смысле слова*. Однако если заменить эту батарею одним источником, э.д.с. которого определяется формулой (148), а внутреннее сопротивление — формулой (147), то токи, протекающие *во внешней цепи* батареи, останутся прежними (какой бы сложной ни была эта цепь). Таким образом, формулы (147), (148) определяют внутреннее сопротивление и э.д.с. источника, *эквивалентного данной батарее*. Это обстоятельство позволяет рассматривать E как э.д.с. данной батареи, а r — как ее внутреннее сопротивление.

478. Имеется неограниченное число батареек для карманного фонаря (одинаковых). Можно ли, соединяя их последовательно, получить сколь угодно большой ток?

479. К аккумулятору последовательно присоединяли одинаковые гальванические элементы и замыкали полученную батарею на внешнее сопротивление. При этом выяснилось, что, сколько бы элементов ни было присоединено, ток во внешней цепи все время остается равным 1 *а*. Найти внутренние сопротивления аккумулятора и гальванического элемента, зная, что э.д.с. аккумулятора $E = 10$ *в*, э.д.с. элемента $E' = 1$ *в* и внешнее сопротивление $R = 6$ *ом*.

480. В батарее (рис. 184) $E_1 = 10$ *в*, $r_1 = 1$ *ом*, $E_2 = 8$ *в*, $r_2 = 2$ *ом*, $E_3 = 15$ *в*, $r_3 = 3$ *ом*, $R_1 = 5$ *ом*, $R_2 = 10$ *ом*. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление этой батареи.

481. В батарее (рис. 185) $E_1 = 12$ *в*, $r_1 = 1$ *ом*, $E_2 = 30$ *в*, $r_2 = 3$ *ом*, $R = 5$ *ом*. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление батареи.

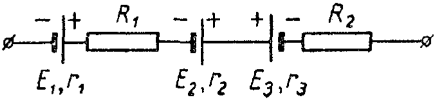


Рис. 184

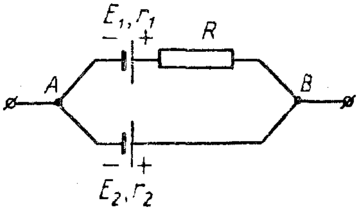
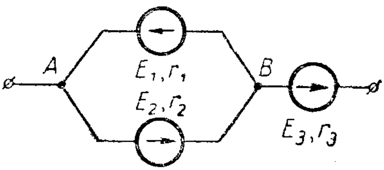


Рис. 185

482. Решить предыдущую задачу, изменив полярность второго источника (т. е. считая, что его положительный полюс находится слева, а отрицательный — справа).

483. Вычислить э.д.с. и внутреннее сопротивление батареи (рис. 186). $E_1 = 10$ *в*, $E_2 = 20$ *в*, $E_3 = 30$ *в*, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ *ом*.

484. Источник с э.д.с. E_1 и внутренним сопротивлением r_1 параллельно соединен с источником, э.д.с. которого E_2, а внутреннее сопротивление равно нулю. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление полученной батареи.



Рие. 186

485. Найти э.д.с. и внутреннее сопротивление источника, зашунтированного сопротивлением R (рис. 187).

486. В батарее (рис. 186) $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ *ом*, $E_2 = 10$ *в*, $E_3 = 15$ *в*. Какой должна быть э.д.с. E_1, чтобы при замыкании этой батареи на внешнее сопротивление через него не шел ток?

487. Была собрана цепь, состоящая из двух источников, реостата r и внешнего сопротивления R (рис. 188). При этом оказа-

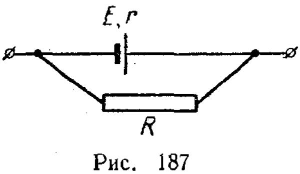


Рис. 187

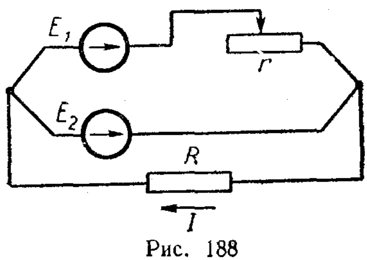


Рис. 188

лось, что, каково бы ни было сопротивление реостата, ток I все время остается равным 1 *а*. Найти э.д.с. E_1 и E_2, зная, что $R = 10$ *ом* и внутреннее сопротивление каждого источника $r_1 = r_2 = 1$ *ом*.

488. Источник $E_1 = 15$ *в* давал ток $I_1 = 1$*а*. Чтобы его увеличить, к источнику E_1 присоединили источник $E_2 = 10$ *в*. Однако как при последовательном, так и при параллельном соединении источников ток продолжал оставаться равным 1 *а*. Найти внутреннее сопротивление каждого источника и сопротивление внешней цепи.

489. Вычислить ток в цепи, показанной на рис. 189. Внутренние сопротивления источников считать равными нулю.

490. В цепи (рис. 190) $E_1 = 15$ *в*, $r_1 = 3$ *ом*, $E_2 = 30$ *в*, $r_2 = 6$ *ом*, $R = 8$ *ом*. Найти все токи этой цепи.

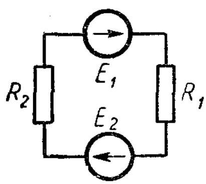


Рис. 189

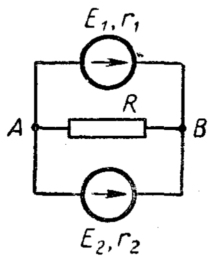


Рис. 190

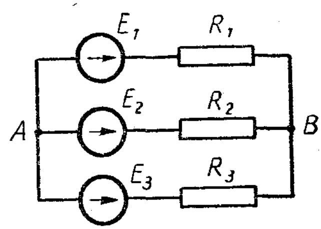


Рис. 191

491. Батарею (см. задачу 483) замкнули на внешнее сопротивление $R = 2$ *ом*. Найти все токи в полученной цепи.

492. В цепи (рис. 191) $E_1 = 30$ *в*, $E_2 = 60$ *в*, $E_3 = 180$ *в*, $R_1 = 3$ *ом*, $R_2 = 6$ *ом*, $R_3 = 12$ *ом*. Найти токи этой цепи. (Внутренние сопротивления источников равны нулю.)

493. Батарею (см. задачу 483) замкнули на конденсатор емкостью 200 *мкф*. Найти его заряд.

3. Метод узловых потенциалов

При расчете сложных цепей можно пользоваться методом узловых потенциалов. Он состоит в том, что потенциал каждого узла обозначают какой-нибудь буквой (например, φ_1, φ_2, φ_3 или x, y, z) и выражают через эти потенциалы все токи. Затем составляют уравнения, выражающие тот факт, что сумма токов, «втекающих» в узел, равна сумме токов, «вытекающих» из узла. Решив полученную систему уравнений, находят все узловые потенциалы и затем все токи. (Поскольку потенциал одного из узлов можно считать равным нулю, то число неизвестных потенциалов всегда меньше числа узлов.)

Пользуясь этим методом, нужно сначала задаться какими-нибудь возможными направлениями всех токов. Если в результате решения задачи некоторые токи получатся отрицательными, значит, они направлены противоположным образом.

494. Решить методом узловых потенциалов задачу 490.

495. В цепи (рис. 192) $E = 22$ *в*, $r = 0$, $R_1 = 1$ *ом*, а каждое из остальных сопротивлений равно 2 *ом*. Найти токи этой цепи.

496. В цепи (рис. 193) $U = 14$ *в*, а каждое из сопротивлений равно 1 *ом*. Найти токи этой цепи.

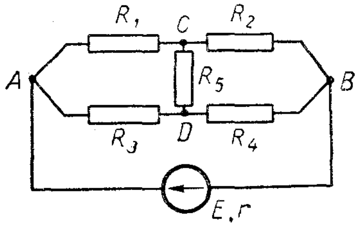


Рис. 192

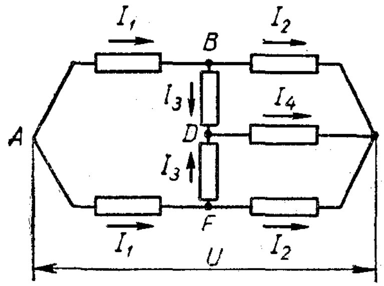


Рис. 193

497. В цепи (рис. 194) $E_1 = 65$ *в*, $E_2 = 39$ *в*, $R_1 = 20$ *ом*, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10$ *ом*. Найти все токи. Внутренние сопротивления источников не учитывать.

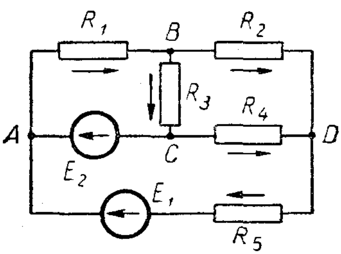


Рис. 194

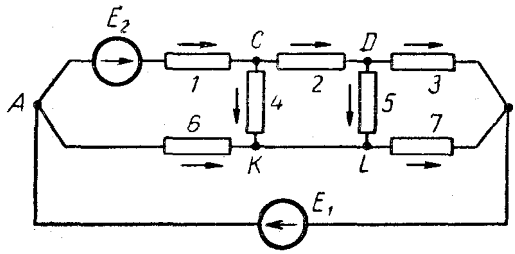


Рис. 195

498. В цепи (рис. 195) $E_1 = 10$ *в*, $E_2 = 30$ *в* и каждое сопротивление равно 1 *ом*. Пренебрегая внутренними сопротивлениями источников, найти все токи.

4. Работа и мощность тока

Если между концами проводника имеется разность потенциалов U и по проводнику протекает постоянный ток I, то работа, совершаемая электрическим полем проводника, равна

$$A = UIt, \tag{149}$$

где t — время. Учитывая закон Ома, можно также написать:

$$A = I^2Rt, \tag{150}$$

или

$$A = \frac{U^2}{R}\,t. \tag{151}$$

Количество теплоты, выделяющейся в проводнике, вычисляется по тем же формулам:

$$Q = UIt, \tag{152}$$

$$Q = I^2Rt, \tag{153}$$

$$Q = \frac{U^2}{R}t. \tag{154}$$

Формула (149) применима не только к проводнику, но и к любому участку цепи постоянного тока. Формулы (150) и (151) могут оказаться при этом неверными, так как если на участке имеется источник э.д.с. или электродвигатель, то равенство $U = IR$ не выполняется. Кроме того, так как работа (149) не всегда полностью превращается в тепло (например, если в цепи имеется электродвигатель), то количество теплоты, выделяющейся в цепи, лучше вычислять, пользуясь формулой (153).

Мощность постоянного тока определяется по формуле

$$N = UI \tag{155}$$

или по формулам

$$N = I^2R, \tag{156}$$

$$N = \frac{U^2}{R}. \tag{157}$$

Первая из этих формул верна для любого участка цепи.

Работа источника э.д.с.

$$A = EIt, \tag{158}$$

а его мощность

$$N = EI, \tag{159}$$

где E — электродвижущая сила.

В системе СИ мощность измеряется в ваттах, а работа — в джоулях, или, что то же самое, в ватт-секундах. Кроме того, ее можно измерять в ватт-часах, киловатт-часах и т. п.; количество теплоты измеряется в джоулях или в калориях. В последнем случае правые части формул (152) — (154) нужно умножить на коэффициент 0,24 *кал/дж*.

499. Продолжительность молнии — примерно 0,001 *сек*. Разность потенциалов между ее концами можно принять равной 10^9 *в*, а силу тока — 20 000 *а*. Вычислить стоимость молнии по существующим ценам на электроэнергию (4 коп. за 1 *квт · ч*).

500. В атмосфере Земли ежесекундно происходит сто разрядов молний (в среднем). Используя данные предыдущей задачи, вычислить годовой расход электроэнергии во всех молниях Земли. Сравнить полученный результат с годичной выработкой электроэнергии во всем мире (около $5 \cdot 10^{12}$ *квт · ч*).

501. Какая масса воды должна пройти через плотину высотой 20 *м*, чтобы обеспечить горение лампочки мощностью 60 *вт* в течение 1 *ч*? К.п.д. принять равным 50%.

502. Первая лампа рассчитана на напряжение 127 *в* и имеет мощность 60 *вт*, а вторая, рассчитанная на то же напряжение, имеет мощность 100 *вт*. Какая из них будет ярче гореть при последовательном включении в сеть с напряжением 127 *в*?

503. Лампу, рассчитанную на напряжение 220 *в*, включили в сеть с напряжением 127 *в*. Так как $N = \frac{U^2}{R}$, а $\frac{220^2}{127^2} = 3$, то можно сделать вывод, что ее мощность будет втрое меньше номинальной. Верно ли это?

504. Вагон освещается пятью последовательно соединенными лампами, на каждой из которых написано: 110 *в*, 25 *вт*. Затем одну из них заменили новой, на которой написано: 110 *в*, 40 *вт*. Будет ли она гореть ярче прежней?

505. Батарейка для карманного фонаря имеет э.д.с. 4,5 *в* и внутреннее сопротивление 3,5 *ом*. Сколько таких батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу, рассчитанную на напряжение 127 *в* и мощность 60 *вт*?

506. Решить предыдущую задачу, считая, что лампа рассчитана на напряжение 127 *в* и мощность 250 *вт*.

507. Когда к источнику, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно присоединяли два разных сопротивления, тепловая мощность была равна 30 *вт* и 60 *вт*. Какой будет тепловая мощность, если замкнуть источник на оба сопротивления, соединенные последовательно?

508. К источнику, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, присоединили два сопротивления. Когда они были соединены последовательно, тепловая мощность равнялась 2 *вт*, а когда параллельно — 9 *вт*. Какой будет тепловая мощность, если замкнуть источник на каждое из этих сопротивлений в отдельности?

509. При поочередном замыкании аккумулятора на сопротивления 10 *ом* и 40 *ом* в них выделялось одинаковое количество теплоты. Найти внутреннее сопротивление аккумулятора.

510. Когда аккумулятор A_1 замкнули на некоторое сопротивление, в последнем выделялась мощность 10 *вт*, а когда на то же сопротивление замкнули аккумулятор A_2, указанная мощность повысилась до 40 *вт*. Какая мощность будет выделяться в этом сопротивлении, если замкнуть на него оба аккумулятора, соединенные последовательно? Внутренние сопротивления аккумуляторов не учитывать.

511. Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделялась мощность 80 *вт*. Какая мощность будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один из аккумуляторов?

512. Аккумулятор имеет э.д.с. 20 *в* и внутреннее сопротивление 5 *ом*. Может ли его полезная тепловая мощность равняться 15 *вт*? Может ли она равняться 25 *вт*?

513. Аккумулятор имеет э.д.с. E и внутреннее сопротивление r. Каково максимальное значение мощности, которую можно получить от него на внешнем сопротивлении?

514. Два аккумулятора имеют одинаковую э.д.с. У первого из них максимальное значение полезной тепловой мощности равно 20 *вт*, а у второго — 30 *вт*. Найти максимальное значение этой мощности при параллельном соединении аккумуляторов. (Воспользоваться ответом к предыдущей задаче.)

515. Решить задачу 514 в случае последовательного соединения аккумуляторов.

516. Как известно, мощность, развиваемая на внешнем сопротивлении, ограничена неравенством $N \leqslant \frac{E^2}{4r}$ (см. решение задачи 513). Доказать, что это верно и для мощности, отдаваемой в любую внешнюю цепь (например, в цепь, содержащую электродвигатель).

517. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R. Найти к.п.д. аккумулятора.

518. Аккумулятор, замкнутый на некоторое сопротивление, имеет к.п.д. 50%. Каким будет к.п.д., если вместо одного такого аккумулятора взять два, соединенные параллельно?

519. Решить предыдущую задачу, считая, что аккумуляторы соединены последовательно.

520. Первый аккумулятор имеет к.п.д. 50%, а второй, замкнутый на такое же сопротивление, — 60%. Каким будет к.п.д., если замкнуть на это сопротивление оба аккумулятора, соединенные последовательно?

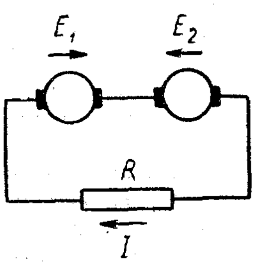


Рис. 196

521. Два гальванических элемента соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление R. $E_1 = 10$ *в*, $E_2 = 6$ *в*, $r_1 = r_2 = 1$ *ом*, $R = 0{,}5$ *ом*. Какая мощность расходуется внутри элементов на выделение тепла?

522. Решить задачу 521, пользуясь формулой $N = I^2r$, где I — ток, протекающий через батарею, а r — внутреннее сопротивление батареи. Сравнить полученный ответ с ответом к задаче 521.

523. Две динамо-машины соединены, как показано на рис. 196. Если пренебречь их внутренними сопротивлениями, то

$$N_1 = E_1 I,\ N_R = I^2 R = IR \cdot I = (E_1 - E_2) I,$$

где N_1 — мощность, развиваемая первой машиной, а N_R — мощность, расходуемая на выделение тепла в сопротивлении R. Из этих выражений видно, что $N_1 > N_R$, т. е. часть мощности, развиваемой первой динамо-машиной, исчезает. Куда?

5. Электролиз

Масса вещества, выделившегося при электролизе, равна

$$m = kIt, \tag{160}$$

где I — ток, t — время и k — электрохимический эквивалент данного вещества (первый закон Фарадея). При этом

$$k = \frac{A}{Fn}, \tag{161}$$

где A — атомный вес вещества, а n — его валентность в данном соединении (второй закон Фарадея). Константа F называется числом Фарадея. В системе СИ она имеет значение $9{,}65 \cdot 10^7 \frac{к}{кг\text{-}экв}$.

Подставив (161) в (160), получим объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{A}{Fn} It. \tag{162}$$

524. Никелирование производят током плотностью 100 *а/м²*. Через сколько времени слой никеля достигнет толщины 0,05 *мм*? Электрохимический эквивалент никеля равен $3 \cdot 10^{-7}$ *кг/к*, а его плотность — $8{,}9 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

525. При какой плотности тока в растворе $AgNO_3$ толщина выделяющегося серебра растет со скоростью 1 *мм/ч*? Электрохимический эквивалент серебра равен $11{,}18 \cdot 10^{-7}$ *кг/к*, а его плотность — $10{,}5 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

526. Медь выделяют из раствора $CuSO_4$ при напряжении 10 *в*. Найти расход электроэнергии на 1 *кг* меди (без учета потерь). Электрохимический эквивалент меди $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ *кг/к*.

527. Когда через электролит проходил ток 1,5 *а*, на катоде в течение 5 *мин* выделилось 503 *мг* металла. Какой это металл?

528. На что нужно больше ампер-часов: на выделение одного килограмм-атома меди из раствора $CuSO_4$ или на выделение одного килограмм-атома железа из раствора $FeCl_2$?

529. Сколько кулонов электричества должно пройти через электролит, чтобы из него выделился килограмм-атом одновалентного вещества?

530. Используя ответ предыдущей задачи, вычислить заряд иона одновалентного вещества.

§ 22. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКА И МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Магнитное поле характеризуется вектором напряженности $\vec{H}$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. В СИ эти величины связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \tag{163}$$

где μ — относительная магнитная проницаемость среды, а μ_0 — магнитная постоянная, равная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ } гн/м. \tag{164}$$

Для магнитного поля в вакууме $\mu = 1$ и

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}. \tag{165}$$

В СИ напряженность магнитного поля измеряется в *а/м*, а магнитная индукция — в теслах (*тл*).

Сила, с которой однородное магнитное поле действует на прямолинейный проводник с током, равна

$$F = BIl\sin\alpha, \tag{166}$$

где I — величина тока, l — длина проводника и α — угол между проводником и вектором $\vec{B}$. Эта сила перпендикулярна плоскости, образованной вектором $\vec{B}$ и проводником с током. Соотношение (166) называется законом Ампера.

Сила, с которой магнитное поле действует на движущуюся заряженную частицу, равна

$$F = Bqv\sin\alpha, \tag{167}$$

где q — заряд частицы, v — ее скорость и α — угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}$. Эта сила перпендикулярна плоскости, образованной указанными векторами; ее называют *силой Лоренца*.

Поток магнитной индукции (магнитный поток) равен

$$\Phi = BS\cos\alpha, \tag{168}$$

где S — площадь поверхности, которую пронизывает этот поток, а α — угол между вектором $\vec{B}$ и перпендикуляром к этой поверхности. (При этом предполагается, что магнитное поле однородно, а рассматриваемая поверхность плоская. Если эти условия не выполнены, вычисление магнитного потока становится более сложным.) В СИ магнитный поток измеряется в веберах (*вб*).

Пусть по замкнутому проводнику протекает ток I, создающий некоторое магнитное поле. Магнитный поток этого поля через поверхность, ограниченную указанным проводником, равен

$$\Phi = LI, \tag{169}$$

где L — коэффициент самоиндукции (индуктивность) проводника. Он зависит от размеров и формы проводника, а также от магнитных свойств среды, в которой находится проводник. В системе СИ индуктивность измеряется в генри (*гн*).

При изменении магнитного потока, пронизывающего некоторый контур, в нем возникает э.д.с. электромагнитной индукции. Она имеет величину

$$E_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|, \tag{170}$$

а ее направление может быть найдено по правилу Ленца. Если эта э.д.с. возникает вследствие изменения тока в самом контуре, то

$$E_i = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| \tag{171}$$

(э.д.с. самоиндукции).

Э.д.с. индукции, возникающую при движении замкнутого проводника в магнитном поле, можно найти по формуле (170). Если проводник не замкнут, то э.д.с. индукции можно найти по той же формуле, понимая под $\Delta\Phi$ магнитный поток через площадь, «ометаемую» проводником за время Δt (заштрихованная площадь на рис. 197).

Магнитное поле тока обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{172}$$

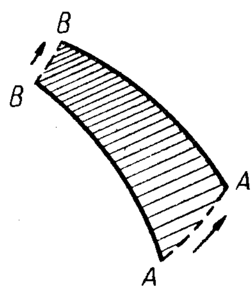


Рис. 197

531. Железный шарик помещен в однородное магнитное поле. С какой силой действует это поле на шарик?

532. На двух тонких нитях висит горизонтальный стержень длиной l и массой m. Стержень находится в однородном магнитном поле, напряженность которого равна H и направлена вертикально вниз. На какой угол отклонятся нити, если пропустить по стержню ток I?

533. Проволочный треугольник, одна из сторон которого вертикальна, находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна B и направлена вниз (рис. 198). Площадь треуголь-

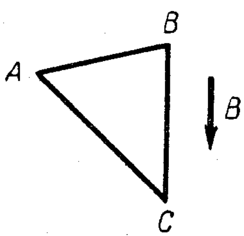


Рис. 198

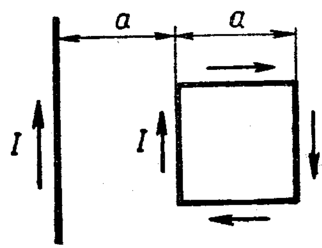


Рис. 199

ника равна S, а ток, протекающий по его контуру, равен I. Найти момент пары, действующей на треугольник со стороны поля.

534. Проволочный квадрат расположен в одной плоскости с бесконечным проводником (рис. 199). По квадрату и по бесконечному проводнику протекает ток I. Как направлена сила, действующая на квадрат со стороны магнитного поля проводника?

535. Заряженная частица движется в однородном магнитном поле, оставаясь в плоскости, перпендикулярной этому полю. Какова ее траектория? (На частицу действует только сила Лоренца.)

536. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле. Магнитная индукция поля равна B, заряд электрона равен e, масса электрона равна m. Найти его угловую скорость. (На электрон действует только сила Лоренца.)

537. Электрон и протон, удаленные друг от друга на значительное расстояние, находятся в однородном магнитном поле. Зная, что каждый из них движется по окружности, найти отношение их угловых скоростей. Масса протона в 1836 раз больше массы электрона. (Никакие силы, кроме сил Лоренца, на электрон и протон не действуют.)

538. Пройдя разность потенциалов 2000 *в*, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $15 \cdot 10^{-5}$ *тл* и движется в нем по дуге окружности радиусом $R = 1$ *м* (в плоскости, перпендикулярной магнитному полю). Найти отношение заряда электрона к его массе (удельный заряд электрона).

539. Металлический стержень, не соединенный с другими проводниками, движется в магнитном поле. Почему, несмотря на наличие э.д.с. индукции, по стержню не идет ток?

540. Магнитное поле Земли имеет вертикальную составляющую $H_0 = 40$ *а/м*. Горизонтальный металлический стержень движется в направлении, перпендикулярном своей длине и вектору $\vec{H}_0$. Какой должна быть его скорость, чтобы между его концами возникла разность потенциалов в 1 *в*? Длина стержня 1 *м*.

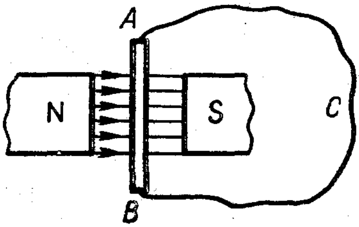


Рис. 200

541. Проводник AB перемещают так, что ток идет по нему от точки A к точке B (рис. 200). Какая из этих точек имеет больший потенциал?

542. Однородное магнитное поле в вакууме изменяется со скоростью 500 *а/м* в секунду. Контур, плоскость которого образует угол 60° с вектором $\vec{H}$, охватывает площадь 0,25 *м*^{2}. Найти э.д.с. электромагнитной индукции в контуре. (Магнитное поле, созданное током в контуре, не учитывать.)

543. Проволочная рамка (рис. 201) вращается с угловой скоростью ω. Рамка имеет площадь S и находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вниз. Какая э.д.с. индуцируется в рамке в момент, когда она расположена вертикально? (Магнитное поле, созданное током в рамке, не учитывать.)

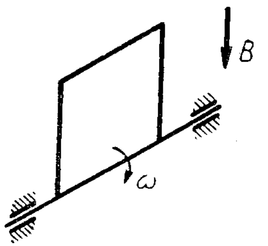


Рис. 201

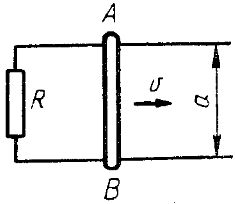


Рис. 202

544. Металлический стержень AB и провода, по которым он скользит, находятся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа (рис. 202). Напряженность поля равна H, расстояние между проводами равно a, скорость стержня равна v, сопротивление цепи равно R. Найти индуцированный ток (пренебрегая его магнитным полем).

545. Проволочная рамка $ABCD$ находится в магнитном поле тока I и движется вправо со скоростью v (рис. 203). Найти э.д.с., индуцированную в рамке, зная, что на расстоянии a от тока I на-

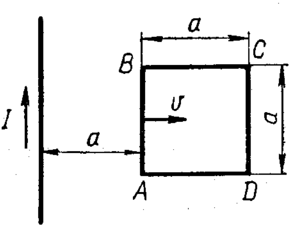


Рис. 203

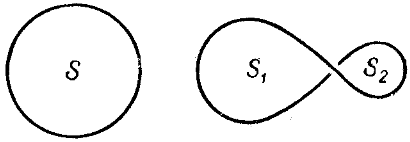


Рис. 204

пряженность магнитного поля равна H, а на расстоянии $2a$ равна $H/2$. (Магнитное поле, созданное током в рамке, не учитывать.)

546. Проводники (рис. 204) находятся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Когда поле стало изменяться (оставаясь однородным), в левом проводнике возникла э.д.с. индукции E. Зная площади S, S_1, S_2, найти э.д.с. индукции в правом проводнике. (Магнитные поля, созданные токами в проводниках, не учитывать.)

547. Кольцо из сверхпроводника находится вблизи постоянного магнита и пронизывается магнитным потоком Φ. Тока в кольце нет. Каким будет магнитный поток через кольцо, если убрать магнит?

548. Замкнутый проводник сопротивлением 3 *ом* находится в магнитном поле. В результате изменения напряженности этого поля магнитный поток через проводник возрос с $\Phi_1 = 0{,}0002$ *вб* до $\Phi_2 = 0{,}0005$ *вб*. Какой заряд прошел через поперечное сечение проводника?

549. Катушка сопротивлением 20 *ом* и индуктивностью 0,01 *гн* находится в переменном магнитном поле. Когда создаваемый этим полем магнитный поток увеличился на 0,001 *вб*, ток в катушке возрос на 0,05 *а*. Какой заряд прошел за это время по катушке?

550. По катушке протекает постоянный ток, создающий магнитное поле. Энергия этого поля равна 0,5 *дж*, а магнитный поток через катушку равен 0,1 *вб*. Найти величину тока.

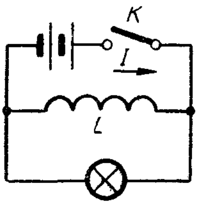


Рис. 205

551. Если в цепи (рис. 205) разомкнуть ключ K, то лампа, которая до этого не была накалена, ярко вспыхнет. Найти количество тепла, выделившегося в лампе, зная, что $I = 8a$ и $L = 0{,}05$ *гн*. (Сопротивление лампы во много раз больше сопротивления дросселя.)

552. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, разряжается через катушку, индуктивность которой равна L, а сопротивление равно нулю. Найти наибольший ток в катушке.

553. Конденсатор емкостью $2 \cdot 10^{-5}$ *ф*, заряженный до напряжения 1000 *в*, разряжается через катушку с индуктивностью 0,004 *гн* и каким-то сопротивлением. Через некоторое время конденсатор разрядился до напряжения 600 *в*, а ток в катушке достиг 20 *а*. Какое количество тепла выделилось к этому моменту в катушке?

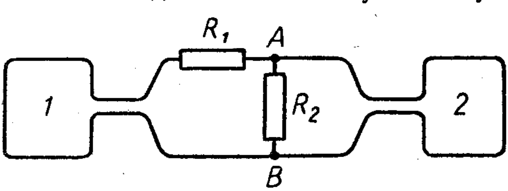


Рис. 206

554. Контуры *1* и *2* (рис. 206) находятся в переменных магнитных полях, создающих магнитные потоки $\Phi_1 = 100t$ и $\Phi_2 = 60t$; на остальных участках цепи магнитное поле отсутствует. Найти токи в этих контурах, зная, что $R_1 = 100$ *ом* и $R_2 = 200$ *ом*. (Индуктивностью контуров пренебречь.)

555. В некоторой цепи имеется участок (рис. 207): $R = 0{,}1$ *ом*, $L = 0{,}01$ *гн*; ток изменяется по закону $I = 2t$. Найти разность потенциалов между точками A и B.

556. В цепи (рис. 207) $R = 0{,}1$ *ом*, $L = 0{,}02$ *гн.* В некоторый момент времени $\varphi_A - \varphi_B = 0{,}1$ *в* и ток увеличивается со скоростью 3 *а/сек*. Какова величина тока в этот момент?

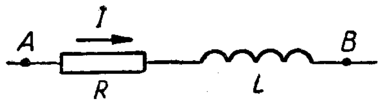


Рис. 207

557. В некоторой цепи имеется участок (рис. 208). Зная, что $R = 2$ *ом*, $L = 0{,}001$ *гн*, $I_1 = 2t$, найти токи I_2, I_3.

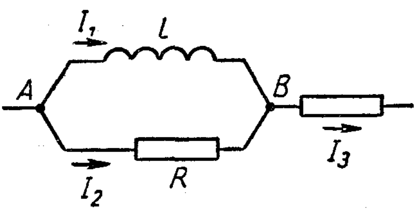


Рис. 208

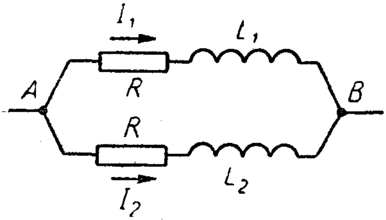


Рис. 209

558. В цепи (рис. 209) $L_1 = 0{,}02$ *гн* и $L_2 = 0{,}005$ *гн*. В некоторый момент ток I_1 равен 0,1 *а* и возрастает со скоростью 10 *а/сек*, а ток I_2 равен 0,2*а* и возрастает со скоростью 20 *а/сек*. Найти сопротивление R.

559. В цепи (рис. 210) $L = 0{,}01$ *гн*, $R = 20$ *ом*, $E = 10$ *в*, $r = 0$. С какой скоростью начнет возрастать ток, если замкнуть цепь?

560. В цепи, описанной в предыдущей задаче, найти скорость изменения тока в момент, когда он достиг 0,3 *а*.

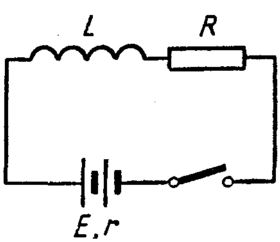


Рис. 210

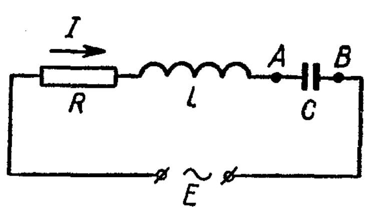


Рис. 211

561. В цепи (рис. 211) $R = 200$ *ом*, $L = 0{,}01$ *гн*, $C = 10^{-5}$ *ф*. В момент, когда переменная э.д.с. E равнялась 50 *в* и была направлена влево, ток I имел величину 0,1*а*, был направлен вправо и возрастал со скоростью 400 *а/сек*. Каким был в этот момент заряд конденсатора?

§ 23. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В шунтовом двигателе обмотки индуктора и якоря соединены параллельно (двигатель с параллельным возбуждением). Ток в цепи якоря определяется равенством

$$U - E = IR, \tag{173}$$

где U — подведенное напряжение, E — э.д.с. индукции и R — сопротивление якоря. Э.д.с. E зависит от скорости вращения двигателя и пропорциональна ей:

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}, \tag{174}$$

а ω зависит от нагрузки двигателя. Механическая мощность двигателя определяется законом сохранения энергии:

$$N = UI - I^2R, \tag{175}$$

где I — ток в цепи якоря, а R — сопротивление якоря. При этом

$$N = M\omega, \tag{176}$$

где M — вращающий момент на валу двигателя (момент нагрузки).

В сериесном двигателе обмотки индуктора и якоря соединены последовательно и составляют единую цепь (двигатель с последовательным возбуждением). Здесь, так же как и в шунтовом двигателе, справедливы формулы (173), (175), (176), если под R понимать сопротивление всей цепи двигателя (индуктора и якоря). Однако равенство (174) здесь неверно, и зависимость E от ω носит более сложный характер (так как в отличие от шунтового двигателя магнитное поле индуктора не постоянно, а зависит от тока в цепи якоря, т. е. изменяется при изменении ω).

В динамо-машинах цепь якоря и цепь индуктора обычно соединяются параллельно. Связь между э.д.с. и током дается равенством

$$E - U = IR, \tag{177}$$

где U — создаваемое напряжение, I — ток в цепи якоря и R — его сопротивление. (При этом E и U зависят как от угловой скорости машины, так и от сопротивления внешней цепи.) Мощность, потребляемая динамо-машиной, равна

$$N = UI + I^2R, \tag{178}$$

где I — ток в цепи якоря, а R — сопротивление якоря. Из соотношений (177) и (178) следует, что

$$N = EI. \tag{179}$$

Формулы (177) — (179) верны и для динамо-машин с постоянными магнитами. Э.д.с. такой машины зависит только от угловой скорости и пропорциональна ей:

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}. \tag{180}$$

562. Шунтовой двигатель, якорь которого имеет сопротивление 2 *ом*, присоединен к источнику напряжения 100 *в*. При этом якорь вращается со скоростью 800 *об/мин* и в его цепи протекает ток 10 *а*. Найти скорость двигателя на холостом ходу (т. е. при отсутствии нагрузки).

563. Двигатель, о котором говорилось в предыдущей задаче, стал вращаться со скоростью 600 *об/мин* (вследствие изменения нагрузки). Какой ток протекает через его якорь? Каким будет этот ток при скорости 1200 *об/мин*?

564. Шунтовой двигатель присоединен к источнику напряжения 120 *в*. При скорости 1000 *об/мин* ток в цепи его якоря равен 10 *а*, а при скорости 900 *об/мин* равен 15 *а*. Найти скорость двигателя на холостом ходу (без нагрузки).

565. Вычислить механическую мощность двигателя (см. задачу 564) при $n = 1000$ *об/мин* и $n = 900$ *об/мин*.

566. Механическая мощность шунтового двигателя равна N, а ток в цепи якоря равен I. Найти э.д.с. индукции.

567. Вращающий момент на валу шунтового двигателя возрос на 20% (вследствие увеличения нагрузки). На сколько процентов возросла мощность тепловых потерь в якоре?

568. Доказать, что вращающий момент шунтового двигателя находится в линейной зависимости от угловой скорости якоря.

569. Без нагрузки шунтовой двигатель делает 1000 *об/мин*, а с некоторой нагрузкой — 700 *об/мин*. Какой будет его скорость, если момент нагрузки увеличится на 20%?

570. Пусть ток, потребляемый шунтовым двигателем, равен I, сопротивление его якоря равно R_1 и сопротивление индуктора равно R_2. Тогда полное сопротивление цепи двигателя будет равно $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, а мощность, затрачиваемая на джоулево тепло, будет равна $I^2\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Так ли это?

571. Сериесный двигатель присоединили к источнику напряжения 500 *в*. Зная, что при токе 10 *а* он развивает мощность 4 *квт*, найти его мощность при токе 20 *а* (ток меняется вследствие изменения нагрузки).

572. Сериесный двигатель, у которого полное сопротивление цепи равно 20 *ом*, присоединен к источнику напряжения 120 *в*. Какова максимально возможная мощность этого двигателя?

573. Изменяя нагрузку сериесного электродвигателя, добились того, что его механическая мощность стала максимальной. С каким к.п.д. работает этот двигатель?

574. Сериесный электродвигатель приводит в движение лебедку, поднимающую груз. Как изменится ток в двигателе, если напряжение сети станет на 10% меньше?

575. Динамо-машина приводится в движение вращающим моментом 15 *н·м*. При этом э.д.с. равна 120 *в*, а ток в цепи якоря — 10 *а*. С какой скоростью вращается машина?

576. Якорь шунтовой динамо-машины имеет сопротивление 2 *ом*. Мощность, потребляемая машиной, равна 1,2 *квт*, а напряжение на ее клеммах — 100 *в*. Найти э.д.с. и ток в цепи якоря.

577. Якорь шунтовой динамо-машины имеет сопротивление 2 *ом*. Работая без нагрузки, машина развивает э.д.с. 100 *в* и напряжение 90 *в*. Когда к ней присоединили внешнюю цепь с сопротивлением 30 *ом*, напряжение упало, и для его восстановления понадобилось увеличить скорость вращения. На сколько процентов?

578. Вращающий момент, приложенный к валу динамо-машины с постоянными магнитами, увеличился на 10%. На сколько процентов увеличился ток?

579. Динамо-машина с постоянными магнитами замкнута на некоторое сопротивление. На сколько процентов увеличится полезная мощность машины, если ее угловая скорость возрастет на 10%?

580. Как изменится ток, генерируемый динамо-машиной с постоянными магнитами, если сопротивление внешней цепи возрастет на 20%, а вращающий момент, приводящий машину в движение, останется прежним?

§ 24. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Если ток изменяется по синусоидальному закону, то

$$I = I_0 \sin(\omega t + \alpha), \tag{181}$$

где I_0 — амплитуда тока, ω — круговая частота и α — начальная фаза. Аналогично

$$U = U_0 \sin(\omega t + \alpha), \tag{182}$$

$$E = E_0 \sin(\omega t + \alpha), \tag{183}$$

где U_0 — амплитуда напряжения и E_0 — амплитуда э.д.с.

Для синусоидального тока

$$I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_э = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad E_э = \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \tag{184}$$

где $I_э$, $U_э$, $E_э$ — эффективные значения тока, напряжения и э.д.с., а I_0, U_0, E_0 — амплитудные значения этих величин. (Вместо «эффективный ток» и «эффективное напряжение» часто говорят просто «ток» и «напряжение».)

Если ток изменяется не синусоидально, то эффективный ток можно найти из условия, что его тепловая мощность равна средней тепловой мощности данного тока.

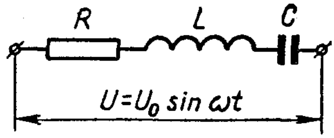


Рис. 212

Сопротивление участка, изображенного на рис. 212, равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (185)$$

Величина R называется *активным* сопротивлением этого участка, разность $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ — *реактивным*, а Z — полным. Реактивное сопротивление обозначают через X. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \qquad (186)$$

где

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \qquad (187)$$

Первый член этой разности представляет индуктивное сопротивление, а второй — емкостное. Индуктивное сопротивление обозначают через X_L, а емкостное — через X_C.

Пусть к концам цепи (рис. 212) приложено напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Тогда ток, протекающий в этой цепи, будет равен

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \qquad (188)$$

где

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} \qquad (189)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{R}. \qquad (190)$$

Равенства (189), (190) определяют величину тока и сдвиг фаз между током и напряжением. Первое из них можно записать в виде

$$I_э = \frac{U_э}{Z}. \qquad (191)$$

Формулы (186), (190) допускают следующую интерпретацию. Проведем координатные оси и условимся изображать R в виде вектора, идущего вдоль оси абсцисс, а X — в виде вектора, идущего вдоль оси ординат (рис. 213). Тогда, сложив их, получим вектор, длина которого равна Z, а угол наклона к оси абсцисс равен φ. Отсюда, в частности, следует, что

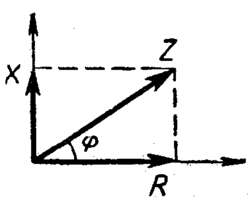


Рис. 213

$$R = Z \cos \varphi, \qquad (192)$$

$$X = Z \sin \varphi. \qquad (193)$$

Мощность переменного тока равна

$$N = U_э I_э \cos \varphi, \tag{194}$$

где φ — сдвиг фаз между током и напряжением.

581. Может ли фаза тока в цепи (рис. 212) отличаться от фазы напряжения на 100°?

582. Ток изменяется по закону, показанному на рис. 214. Каково эффективное значение этого тока?

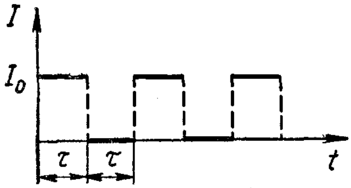


Рис. 214

583. По проводнику протекает ток, график которого показан на рис. 214. Величины I_0 и τ неизвестны, но известно, что эффективное значение этого тока равно 2 *а*. Какое количество электричества протекает через поперечное сечение этого проводника за 1 *ч*?

584. По проводу *1* протекает ток $I_1 = 3 \sin \omega t$, а по проводу *2* — ток $I_2 = 4 \cos \omega t$ (рис. 215). Какова амплитуда тока I? (Токи считаются положительными, если текут слева направо.)

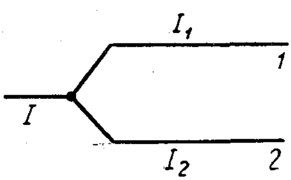


Рис. 215

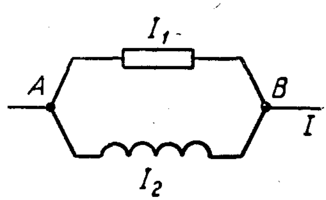


Рис. 216

585. В некоторой цепи имеется участок (рис. 216). Верхняя ветвь содержит только омическое сопротивление, а нижняя — только индуктивное. Зная, что ток I_1 имеет эффективное значение 3 *а*, а ток I_2 — эффективное значение 4 *а*, найти эффективное значение тока I. (Все токи синусоидальны.)

586. Измеряя сопротивление катушки, включенной в сеть переменного тока, нашли, что оно равно 110 *ом*. Когда затем измерили сопротивление такой же катушки, но из провода с вдвое большим удельным сопротивлением, то оно оказалось равным 140 *ом*. (Вторая катушка включалась в ту же сеть.) Каково омическое сопротивление первой катушки?

587. По участку *ABC* (рис. 217) протекает синусоидальный ток. На участке *AB* эффективное напряжение равно 30 *в*, а на участке *BC* равно 40 *в*. Найти эффективное напряжение на участке *AC*.

588. По участку ABC (рис. 218) протекает синусоидальный ток. Индуктивность катушки равна 0,25 *гн*, емкость конденсатора равна 100 *мкф*, омическим сопротивлением участка можно пренебречь. При каком значении частоты сопротивление этого участка равно нулю?

Рис. 217

Рис. 218

589. По участку ABC (рис. 218) протекает синусоидальный ток. На участке AB эффективное напряжение равно 100 *в*, а на участке BC равно 20 *в*. Найти эффективное напряжение на участке AC.

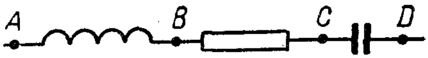


Рис. 219

590. В цепи (рис. 219) протекает синусоидальный ток. Зная, что эффективное напряжение $U_{AB} = 15$ *в*, эффективное напряжение $U_{BC} = 12$ *в* и эффективное напряжение $U_{CD} = 10$ *в*, найти эффективное напряжение на участке AD.

591. На участке AC (рис. 217) сдвиг фаз между током и напряжением равен 40°. Как изменится эта величина, если частота напряжения U_{AC} станет вдвое больше?

592. В цепи (рис. 220) $R = 20$ *ом*, $L = 0{,}2$ *гн*, $C = 100$ *мкф*, $U_э = 75$ *в* и частота $f = 50$ *гц*. Найти эффективный ток и разность фаз между напряжением и током.

593. Для цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, найти эффективное напряжение на каждом участке.

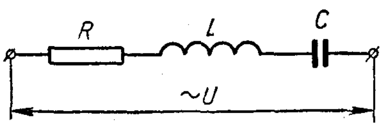


Рис. 220

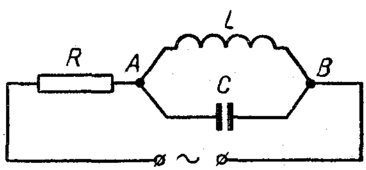


Рис. 221

594. В цепи (рис. 221) $L = 0{,}1$ *гн*, $C = 10$ *мкф*, $\omega = 1000$ *сек*$^{-1}$. Найти ток, протекающий через сопротивление R.

595. Цепь переменного тока (см. рис. 220) состоит из трех последовательно соединенных сопротивлений. Может ли одновременное увеличение каждого из них привести к уменьшению общего сопротивления?

596. В городскую сеть включили лампочку для карманного фонаря, последовательно соединенную с конденсатором (рис. 222). Какой должна быть его емкость, чтобы лампочка горела нормальным накалом? (Лампочка для карманного фонаря рассчитана на напряжение 3,5 *в* и ток 0,28 *а*.)

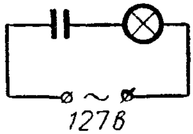


Рис. 222

Рис. 223

597. Напряжение $U = 100$ *в* подвели один раз к участку AB, а другой раз — к участку BC (рис. 223). В первом случае ток был равен 1 *а* и отставал от напряжения на 10°, а во втором — ток равнялся 5 *а* и отставал от напряжения на 50°. Каким будет ток, если подвести это напряжение к участку AC?

598. К участку AB (рис. 224) подведено напряжение $U = U_0 \sin \omega t$, где $U_0 = 120$ *в*. Зная, что омическое сопротивление равно 60 *ом*, а индуктивное — 80 *ом*, найти полное сопротивление этого участка. (Предварительно вычислить ток, протекающий через участок.)

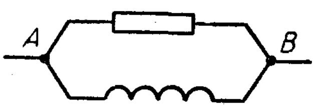


Рис. 224

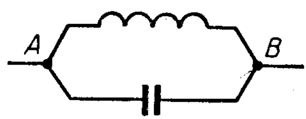


Рис. 225

599. К участку AB (рис. 225) подведено напряжение $U = U_0 \sin \omega t$, где $U_0 = 120$ *в*. Зная, что индуктивное сопротивление равно 80 *ом*, а емкостное—60 *ом*, найти полное сопротивление этого участка. (Предварительно вычислить ток, протекающий через участок.)

600. Решить предыдущую задачу в случае, когда емкостное сопротивление тоже равно 80 *ом*. Как понимать получающийся ответ?

601. Вычислить мощность тока в цепи из задачи 592.

602. В цепи (рис. 226) емкость C может изменяться, а остальные параметры цепи остаются неизменными. При каком значении C мощность протекающего тока будет максимальной? Какова эта мощность?

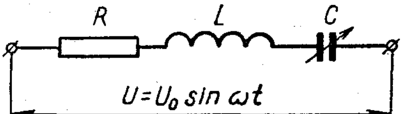


Рис. 226

603. К участку цепи подведено эффективное напряжение $U_э$. Омическое сопротивление участка равно R, а сдвиг фаз между током и напряжением равен φ. Найти мощность тока.

604. Найти мощность, теряемую в проводах, идущих от станции к потребителю, при следующих данных: полная мощность $N = 100$ *квт*, напряжение на станции $U = 220$ *в*, сопротивление проводов $R = 0{,}05$ *ом*, сдвиг фаз $\varphi = 30°$.

605. Первичная обмотка трансформатора находится под напряжением $U_1 = 120$ *в* и потребляет ток $I_1 = 0{,}5$ *а*. Вторичная обмотка питает лампу накала током $I_2 = 3$*а* при напряжении $U_2 = 10$ *в*. Коэффициент полезного действия трансформатора равен $\eta = 0{,}7$. Найти сдвиг фазы в первичной обмотке.

§ 25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если омическое сопротивление колебательного контура мало по сравнению с его индуктивным сопротивлением, то период собственных колебаний контура равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{195}$$

где L — индуктивность катушки, а C — емкость конденсатора. Эти колебания протекают по гармоническому закону.

Длина электромагнитной волны в пустоте

$$\lambda = cT, \tag{196}$$

где

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}. \tag{197}$$

В процессе собственных колебаний контура происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот. Так как энергия электрического поля равна $\frac{CU^2}{2}$, а энергия магнитного поля катушки равна $\frac{LI^2}{2}$, то

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}. \tag{198}$$

Соотношение (198) справедливо лишь для колебаний, не сопровождающихся потерей энергии. Им можно пользоваться и в случае колебаний с небольшим рассеиванием энергии, если рассматривать их на протяжении короткого интервала времени, например на протяжении одного периода (так как потерей энергии за это время можно пренебречь).

Собственные колебания контура не поддерживаются внешним источником энергии и поэтому называются *свободными*. Колебания, поддерживаемые внешней э.д.с., называются *вынужденными*.

606. Собственные колебания контура протекают по закону $I = 0{,}01 \cos 1000t$. Найти индуктивность контура, зная, что емкость его конденсатора равна 10 *мкф*.

607. Когда в колебательном контуре был конденсатор *1*, собственные колебания совершались с частотой 30 *кгц*, а когда конденсатор *1* заменили конденсатором *2*, частота собственных колебаний стала равной 40 *кгц*. Какой будет эта частота при параллельном соединении конденсаторов *1* и *2*?

608. Решить предыдущую задачу, считая, что конденсаторы *1* и *2* соединены последовательно.

609. Конденсатору колебательного контура был сообщен заряд 10^{-4} *к*, и в контуре начались свободные затухающие колебания. Зная, что емкость конденсатора равна 0,01 *мкф*, найти количество теплоты, которое выделится к моменту, когда колебания полностью прекратятся.

610. В контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются свободные незатухающие колебания. Зная, что максимальное напряжение на конденсаторе равно $U_{\max}$, найти максимальный ток в этом контуре.

611. Колебательный контур составлен из дросселя с индуктивностью 0,2 *гн* и конденсатора с емкостью 10^{-5} *ф*. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно 1 *в*, ток в контуре равен 0,01 *а*. Каков максимальный ток в этом контуре?

612. Каков заряд конденсатора (см. задачу 611) в момент, когда ток равен 0,005 *а*?

613. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 0,2 *гн* и конденсатора емкостью 10^{-5} *ф*. Конденсатор зарядили до напряжения 2 *в*, и он начал разряжаться. Каким будет ток в момент, когда энергия контура окажется поровну распределенной между электрическим и магнитным полем?

614. В колебательном контуре происходят свободные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора равен 10^{-6} *к*, а максимальный ток равен 10 *а*, найти длину волны этого контура.

615. Колебательный контур с длиной волны 300 *м* имеет индуктивность 0,2 *гн* и омическое сопротивление 2 *ом*. На сколько процентов уменьшается энергия этого контура за время одного колебания? (На протяжении одного колебания ток можно считать синусоидальным.)

616. В колебательный контур с емкостью $C = 10^{-5}$ *ф* и индуктивностью $L = 0{,}1$ *гн* включен источник переменной э.д.с. (последовательно). Зная, что э.д.с. имеет амплитуду $E_0 = 15$ *в* и круговую частоту $\omega = 500$ *сек*$^{-1}$, найти амплитуду тока в контуре. (Омическое сопротивление контура считать равным нулю.)

617. Решить предыдущую задачу, считая $\omega = 1000$ *сек*$^{-1}$. Как понимать получающийся ответ?

618. В колебательный контур с индуктивностью L, емкостью C и омическим сопротивлением R последовательно включили источник синусоидальной э.д.с. с амплитудой E_0. Затем, меняя частоту этой э.д.с., добились того, что амплитуда тока стала максимальной. Какой?

619. Доказать, что собственные колебания контура происходят с частотой, при которой индуктивное сопротивление его катушки равно емкостному сопротивлению его конденсатора.

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 26. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ

При отражении света от границы, разделяющей две среды, угол отражения равен углу падения.

Свет, идущий из вакуума в некоторую среду, частично отражается и частично преломляется. Угол падения α и угол преломления β связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \tag{199}$$

где n — абсолютный показатель преломления данной среды.

Если луч света переходит из одной среды в другую, то

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{200}$$

где α_1 — угол падения и α_2 — угол преломления (рис. 227), а n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления этих сред. Равенство (200) верно при переходе луча из среды *1* в среду *2* и при обратном переходе — из среды *2* в среду *1*.

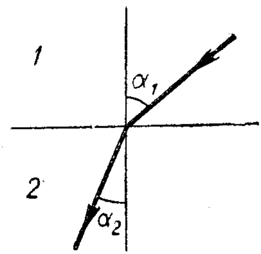


Рис. 227

Показатель преломления n равен отношению

$$n = \frac{c}{v}, \tag{201}$$

где c — скорость света в вакууме, а v — в данной среде. Отсюда следует, что

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2},$$

и поэтому равенство (200) можно записать в виде

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{202}$$

Если луч переходит из среды *1* в среду *2*, то согласно равенству (200)

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1.$$

Следовательно, такой переход возможен лишь при $\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1 \leqslant 1$, т. е. при

$$\sin\alpha_1 \leqslant \frac{n_2}{n_1}. \tag{203}$$

Если $n_2 > n_1$ (вторая среда оптически более плотная), то условие (203) выполняется при любом угле падения α_1. Если же $n_2 < n_1$ (вторая среда оптически менее плотная), то переход из среды *1* в среду *2* возможен только при выполнении условия (203), т. е. если

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_0, \tag{204}$$

где α_0 — угол, определяемый равенством

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}. \tag{205}$$

В противном случае происходит так называемое *полное отражение*: падающий луч отражается от границы второй среды и возвращается в первую среду. Угол α_0 называется предельным углом полного отражения.

620. Зеркало OA вращается с угловой скоростью ω (рис. 228). С какой скоростью движется отражение точки S? (Точка S неподвижна, расстояние OS равно l.)

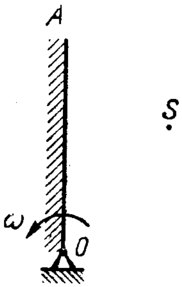


Рис. 228

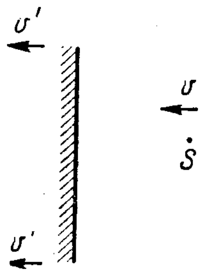


Рис. 229

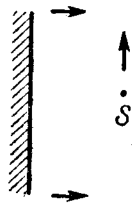


Рис. 230

621. Точка S движется со скоростью v, а зеркало — со скоростью v' (рис. 229). При каком значении v' отражение точки S будет неподвижным? (Зеркало движется поступательно.)

622. Точка S движется со скоростью 3 *см/сек*, а зеркало — со скоростью 2 *см/сек* (рис. 230). С какой скоростью движется отражение точки S? (Зеркало движется поступательно.)

623. Когда луч шел из первой среды во вторую, угол падения был равен 60°, а угол преломления — 45°. Когда луч шел из первой среды в третью, угол падения был равен 60°, а угол преломления — 30°. Когда луч шел из второй среды в третью, угол падения был равен 60°, а угол преломления равнялся β. Вычислить β.

624. В системе вода — воздух предельный угол полного отражения равен 49°, а в системе стекло—воздух он равен 42°. Найти предельный угол полного отражения для системы стекло—вода.

625. При переходе из первой среды во вторую угол преломления равен 45°, а при переходе из первой среды в третью угол преломления равен 30° (при том же угле падения). Найти предельный угол полного отражения для луча, идущего из третьей среды во вторую.

626. Взаимно перпендикулярные лучи *1* и *2* идут из воздуха в жидкость (рис. 231). У первого луча угол преломления равен 30°, а у второго — 45°. Найти показатель преломления жидкости.

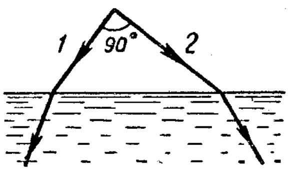


Рис. 231

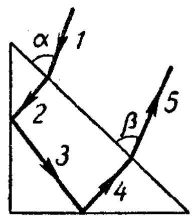


Рис. 232

627. При переходе из воздуха в воду луч света отклоняется на 20°. Как изменится этот угол, если налить на поверхность воды тонкий слой масла?

628. Луч, идущий из воды, полностью отражается от ее поверхности и поэтому не проникает в воздух. Выйдет ли этот луч в воздух, если налить на поверхность воды слой прозрачного масла?

629. Призма в виде равнобедренного прямоугольного треугольника имеет посеребренные грани-катеты (рис. 232). Луч падает на грань-гипотенузу под углом α и выходит через эту грань под углом β. Считая α известным, найти β.

630. Луч света выходит из призмы под тем же углом, под каким входит в нее (рис. 233). Зная, что преломляющий угол призмы равен 45°, а угол отклонения луча от первоначального направления равен 30°, найти коэффициент преломления.

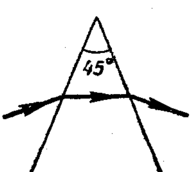


Рис. 233

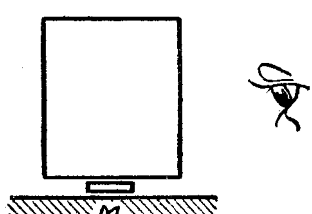


Рис. 234

631. Стеклянная прямоугольная призма поставлена на монету (рис. 234). Коэффициент преломления стекла равен 1,5. Доказать, что монету нельзя увидеть через боковую грань призмы.

632. В каком случае луч света имеет криволинейную форму?

§ 27. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА И ЛИНЗЫ

Сферические зеркала и тонкие линзы дают четкие изображения предметов, находящихся вблизи главной оптической оси.

Зеркала и линзы делятся на *собирающие* и *рассеивающие*. У первых — главный фокус действительный, а у вторых — мнимый. Собирающую и рассеивающую линзы условно изображают так, как показано на рис. 235, 236.

Рис. 235

Рис. 236

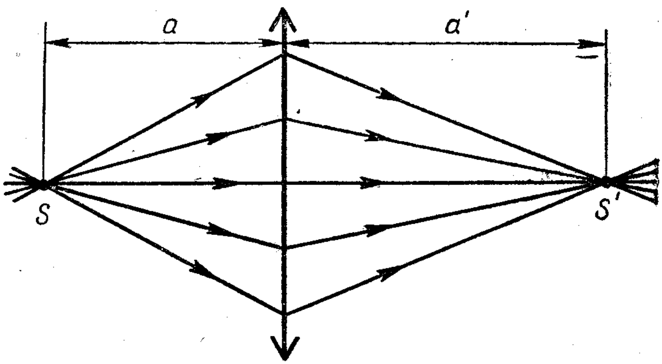


Рис. 237

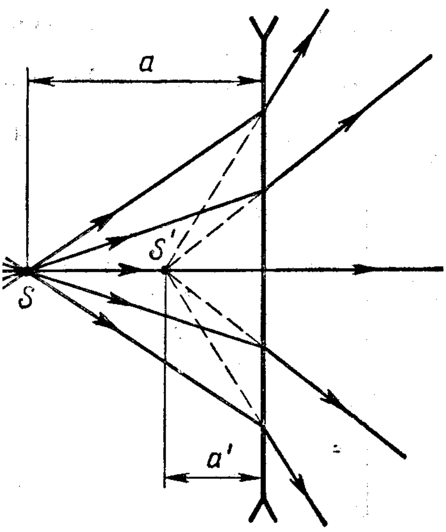


Рис. 238

Лучи, пересекающиеся в одной точке, после отражения от зеркала или преломления в линзе опять пересекаются в одной точке (точки S и S' на рис. 237, 238). Каждая из этих точек может быть действительной (если в ней пересекаются сами лучи) или мнимой (если в ней пересекаются продолжения лучей). Например, на рис. 237 точки S и S' — действительные, а на рис. 238 точка S действительная, а точка S' мнимая. Точки S и S' называются *сопряженными*. Одну из них можно рассматривать как источник света, а другую — как его изображение.

Связь между положением точки S и положением ее изображения S' дается формулой

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}, \tag{206}$$

где a и a' — расстояния этих точек от линзы (или зеркала), а F — фокусное расстояние линзы (или зеркала). Величинам, входящим в эту формулу, приписывается определенный знак, а именно:

расстояние a считается положительным, если точка S действительная, и отрицательным, если точка S мнимая;

расстояние a' считается положительным, если точка S' действительная, и отрицательным, если эта точка мнимая;

расстояние F считается положительным, если линза собирающая (зеркало собирающее), и отрицательным, если линза — рассеивающая (если зеркало рассеивающее). Так, для линзы на рис. 237 величины a, a', F положительны, а для линзы на рис. 238 расстояние a положительно, а расстояния a' и F — отрицательны. Следует иметь в виду, что отрицательным может быть любое из расстояний a и a', ибо мнимым может быть не только изображение, но и источник. Например, если лучи, показанные на рис. 238, направить в противоположную сторону, то точка S' будет мнимым источником, а точка S — его действительным изображением. (Такой случай может возникнуть, если справа от данной линзы находится другая, собирающая лучи в точку S'.)

Если пользоваться указанным правилом знаков для a, a' и F, то формула (206) будет верна для любой тонкой линзы и любого сферического зеркала. Она верна и в случае, когда точки S, S' не лежат на главной оптической оси (если расстояния a и a' измерять вдоль этой оси; см. рис. 239).

Создаваемое линзой (или зеркалом) линейное увеличение

$$k=\frac{h'}{h}=\frac{|a'|}{|a|}, \tag{207}$$

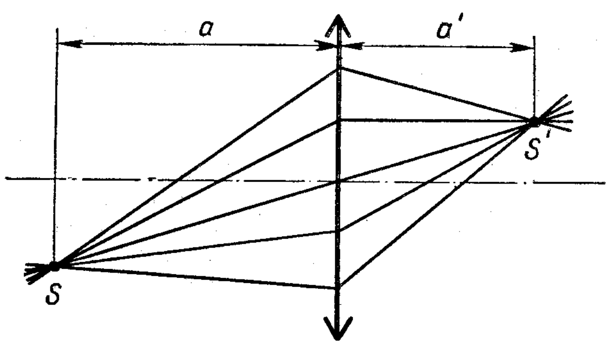


Рис. 239

где h — величина отрезка, а h' — величина его изображения. Это соотношение верно лишь для отрезков, перпендикулярных главной оптической оси.

Фокусное расстояние зеркала

$$|F|=\frac{R}{2}, \qquad (208)$$

где R — его радиус кривизны.

Фокусное расстояние линзы определяется равенством

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (209)$$

где n — показатель преломления, а R_1 и R_2 — радиусы поверхностей, ограничивающих линзу, причем *радиус выпуклой поверхности считается положительным, а радиус вогнутой — отрицательным*. Формула (209) определяет F не только по величине, но и по знаку (у собирающей линзы — плюс, у рассеивающей — минус).

Оптической силой линзы (зеркала) называется величина

$$D=\frac{1}{F}. \qquad (210)$$

Здесь F нужно измерять в метрах, тогда D будет выражаться в диоптриях (*дптр*). У собирающих линз (зеркал) оптическая сила положительна, а у рассеивающих — отрицательна.

633. Какова оптическая сила плоского зеркала?

634. Симметричная собирающая линза сделана из стекла с показателем преломления n. Каким должен быть этот показатель преломления, чтобы фокусное расстояние линзы равнялось радиусу кривизны ее поверхностей?

635. Плоско-выпуклая линза сделана из материала с показателем преломления n. При каком значении n фокусное расстояние линзы равно радиусу ее сферической поверхности?

636. Воздушная линза, образованная двумя часовыми стеклами, помещена в воду (рис. 240). Найти ее фокусное расстояние, зная, что стеклянная линза такой же формы имеет в воздухе фокусное расстояние 40 *см*. Коэффициент преломления стекла равен 3/2, а коэффициент преломления воды — 4/3.

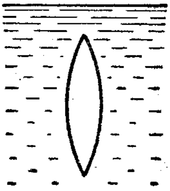


Рис. 240

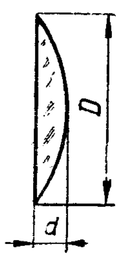


Рис. 241

637. Тонкая стеклянная линза имеет оптическую силу $D=5$ *дптр*. Та же линза, погруженная в жидкость, имеет оптическую силу $D'=-1$ *дптр*. Найти показатель преломления жидкости, зная, что показатель преломления стекла равен 1,5.

638. Плоско-выпуклая линза сделана из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ (рис. 241). Найти ее фокусное расстояние, зная, что $D = 10$ *см* и $d = 1$ *см*.

639. Фокусное расстояние собирающей линзы можно считать равным расстоянию от плоскости линзы до изображения далекой лампы. Как далеко должна находиться эта лампа, чтобы найденное таким путем фокусное расстояние отличалось от истинного менее, чем на 1%?

640. Точка S находится на главной оптической оси собирающей линзы. Фокусное расстояние линзы равно 20 *см*, а расстояние между линзой и точкой S равно 15 *см*. Где находится изображение этой точки?

641. Точка S находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Фокусное расстояние линзы $F = -40$ *см*, а расстояние от линзы до мнимого изображения точки S равно 30 *см*. Где находится точка S?

642. Точка S находится на расстоянии 50 *см* от плоскости линзы, а ее мнимое изображение S' — на расстоянии, вдвое меньшем. Найти фокусное расстояние линзы.

643. Лучи попадают на зеркало так, как показано на рис 242. Зная, что $F = -30$ *см* и $OS = 20$ *см*, найти точку, в которой соберутся лучи после отражения.

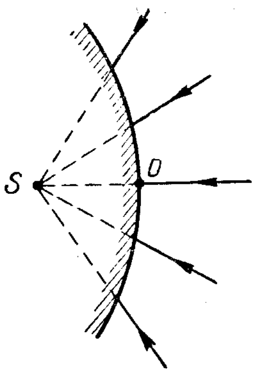


Рис. 242

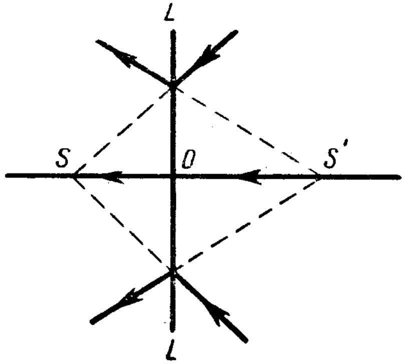


Рис. 243

644. Мнимый источник S находится в главном фокусе собирающей линзы. Где находится его изображение?

645. На рис. 243 показано, как линза LL преобразует падающие на нее лучи. Зная, что $OS = 40$ *см* и $OS' = 60$ *см*, найти фокусное расстояние линзы.

646. Собирающая линза с фокусным расстоянием 30 *см* расположена так, как показано на рис. 244. Зная, что координаты точки A равны 50 *см* и 10 *см*, найти координаты ее изображения A'.

647. Решить предыдущую задачу, заменив собирающую линзу собирающим зеркалом с тем же фокусным расстоянием (рис. 245).

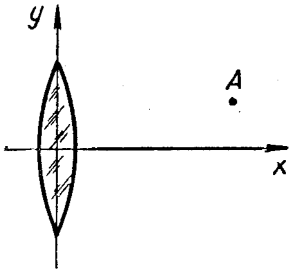


Рис. 244

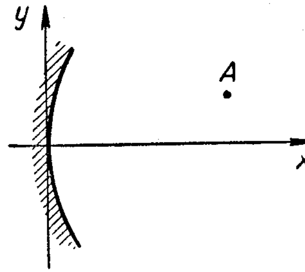


Рис. 245

648. Точка A и ее изображение A' расположены так, как показано на рис. 246. Зная, что $h = 3$ *см*, $h' = 2$ *см* и $l = 10$ *см*, найти фокусное расстояние линзы, с помощью которой получено изображение A'.

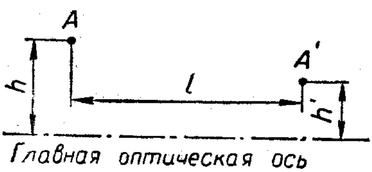


Рис. 246

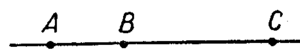


Рис. 247

649. Собирающая линза дает изображение точечного источника света. Когда источник находился в точке A, его изображение получилось в точке B, а когда источник поместили в точку B, его изображение получилось в точке C. Совпадают ли точки C и A?

650. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы. Когда он помещался в точке A, его изображение находилось в точке B, а когда источник поместили в точку B, его изображение оказалось в точке C (рис. 247). Зная, что $AB = 10$ *см* и $BC = 20$ *см*, найти фокусное расстояние линзы.

651. Линза дает трехкратное увеличение предмета, находящегося в 10 *см* от ее плоскости. Найти ее фокусное расстояние.

652. Расстояние от предмета до плоскости собирающей линзы в n раз меньше ее фокусного расстояния. Найти увеличение.

653. Спичка расположена в фокальной плоскости рассеивающей линзы. Во сколько раз линза уменьшает длину спички?

654. Предмет находится на главной оптической оси собирающей линзы. На сколько процентов увеличится размер его изображения, если расстояние от предмета до переднего фокуса линзы уменьшится на 20%?

655. Точка A движется со скоростью $v = 2$ *см/сек* (рис. 248). С какой скоростью движется ее изображение, если $a = 15$ *см*, а фокусное расстояние линзы равно 10 *см*?

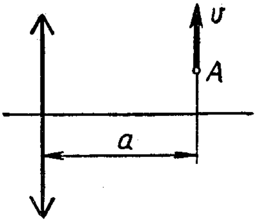


Рис. 248

656. Каким должен быть радиус вогнутого зеркала, чтобы человек, глядящийся в него, видел свое лицо на расстоянии 25 *см* с увеличением $k = 1{,}5$?

657. Предмет и экран находятся на расстоянии 90 *см* друг от друга. Перемещая между ними собирающую линзу, установили, что существуют два положения, при которых она дает четкое изображение предмета на экране. Найти фокусное расстояние линзы, зная, что линейные размеры первого изображения вчетверо больше линейных размеров второго.

658. Перемещая линзу между предметом и экраном, нашли два положения, при которых линза дает на экране четкое изображение предмета. Найти высоту предмета, зная, что высота первого изображения равна h_1, а высота второго равна h_2.

659. Лупа с фокусным расстоянием 12 *см* «отодвигает» рассматриваемый предмет на 2 *см*. Во сколько раз она его увеличивает?

660. Лупа давала линейное увеличение $k = 4$. Как изменится это число, если вдвое уменьшить расстояние рассматриваемого предмета от плоскости лупы?

661. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением $k = 3$. Как изменится это число, если вдвое уменьшить оптическую силу линзы?

662. Когда предмет находился в точке A, линза давала увеличение $k_1 = 2$, а когда предмет поместили в точку B, увеличение стало равным $k_2 = 3$ (рис. 249). Каким будет увеличение, если предмет будет находиться в середине отрезка AB?

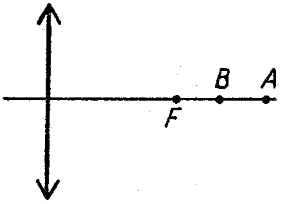


Рис. 249

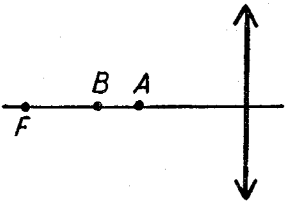


Рис. 250

663. Предмет, помещенный в точку A, линза увеличивает вдвое, а предмет, помещенный в точку B, — втрое (рис. 250). Во сколько раз увеличивает эта линза длину отрезка AB?

§ 28. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Изображение, полученное от первой линзы системы, можно рассматривать как источник (действительный или мнимый), посылающий лучи на вторую линзу; изображение, созданное второй линзой, можно рассматривать как источник света для третьей линзы и т. д.

Две линзы, вплотную прилегающие друг к другу, можно заменить одной линзой с оптической силой

$$D = D_1 + D_2, \qquad (211)$$

где D_1 и D_2 — оптические силы данных линз. Это правило верно и для нескольких линз, а также для линзы, вплотную прилегающей к зеркалу. Однако в последнем случае оптическую силу линзы приходится считать дважды (см. задачи 666—669.)

664. Линзы *1* и *2* сделаны из одного сорта стекла (рис. 251). Найти оптическую силу линзы *2*, зная, что линза *1* имеет оптическую силу 3 *дптр*.

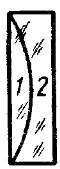


Рис. 251

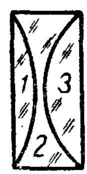


Рис. 252

665. Из стеклянной пластинки были изготовлены три линзы (рис. 252). При этом оказалось, что оптическая сила системы (*1*,*2*) равна —2 *дптр*, а оптическая сила системы (*2*,*3*) равна — 3 *дптр*. Найти оптическую силу линзы *2*.

666. На плоском зеркале лежит линза с фокусным расстоянием 40 *см* (рис. 253). Какова оптическая сила этой системы?

667. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны 50 *см* имеет оптическую силу 1 *дптр*. Как изменится эта величина, если посеребрить плоскую поверхность линзы? сферическую? (Свет падает на непосеребренную поверхность.)

Рис. 253

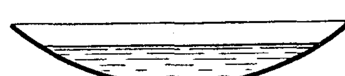


Рис. 254

668. Вогнутое зеркало наполнено водой (рис. 254). Зная, что радиус кривизны зеркала равен 40 *см*, а показатель преломления воды равен $\frac{4}{3}$, найти фокусное расстояние этой системы.

669. Линза (рис. 255) имеет радиусы кривизны R и $3R$. Когда заднюю поверхность линзы посеребрили, ее оптическая сила стала равной нулю. Найти показатель преломления стекла, из которого сделана линза.

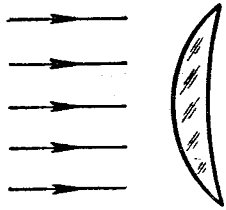


Рис. 255

670. Если у плоско-выпуклой линзы посеребрить плоскую поверхность, оптическая сила линзы станет равной 4 *дптр*, а если посеребрить сферическую поверхность, оптическая сила увеличится до 9 *дптр*. Каков показатель преломления стекла линзы?

671. Линза с фокусным расстоянием 40 *см* вплотную прилегает к плоскому зеркалу (см. рис. 253). На оптической оси линзы на высоте $h = 10$ *см* находится светящаяся точка S. Где находится ее изображение?

672. На главной оптической оси собирающей линзы находится точка S. Радиус каждой поверхности линзы равен 0,4 *м*, фокусное расстояние линзы равно 0,25 *м*, расстояние до точки S равно 1 *м*. Где будет находиться изображение точки S, если посеребрить заднюю поверхность линзы?

673. К вогнутому сферическому зеркалу приложена собирающая линза (рис. 256). Лучи, выходящие из точки S, проходят через линзу, отражаются от зеркала, вновь проходят через линзу и опять собираются в точке S. Найти фокусное расстояние линзы, зная, что радиус кривизны зеркала равен 1 *м*, а расстояние от линзы до точки S равно 20 *см*.

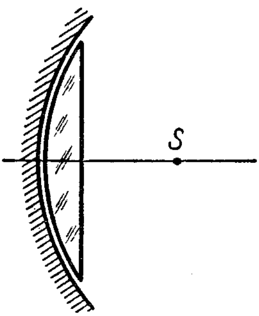


Рис. 256

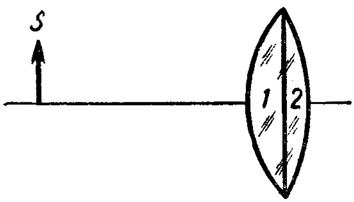


Рис. 257

674. Лучи, идущие от источника S, проходят через линзы *1* и *2* (рис. 257). Если оставить только линзу *1*, то увеличение будет равно двум, а если оставить только линзу *2*, то увеличение станет равным трем. Какое увеличение создают эти линзы вместе? (Источник находится левее главных фокусов линз *1* и *2*.)

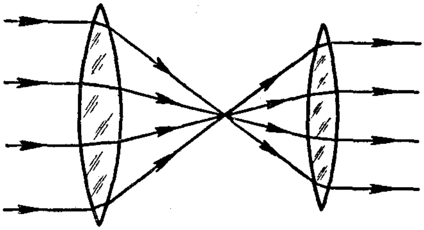


Рис. 258

675. Оптическая система, преобразующая пучок параллельных лучей так, как показано на рис. 258, называется *телескопической*. Пусть две собирающие линзы образуют телескопическую систему. Как надо изменить расстояние между ними, чтобы они образовали телескопическую систему, будучи помещенными в воду? (Показатель преломления стекла —3/2, а воды —4/3.)

676. Линзы с оптическими силами $D_1 = 4$ *дптр* и $D_2 = 5$ *дптр* находятся на расстоянии 0,9 *м* друг от друга. Где находится изображение предмета, расположенного на расстоянии 0,5 *м* перед первой линзой? (Главные оптические оси линз совпадают.)

677. Решить предыдущую задачу для случая, когда расстояние между линзами равно 0,3 *м*.

678. Оптическая система состоит из собирающих линз *1* и *2* (рис. 259). Наблюдатель, глядящий справа, видит источник S там, где он фактически находится. Зная, что $a = 0{,}25$ *м*, $d = 0{,}75$ *м* и $D_1 = 6$ *дптр*, найти D_2.

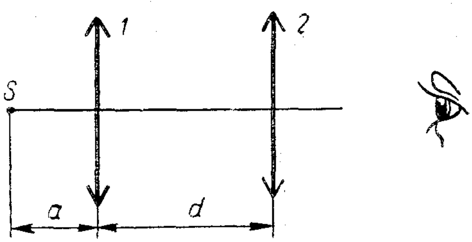


Рис. 259

679. Система состоит из двух линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ *см* и $F_2 = -20$ *см*. Пучок лучей, параллельных главной оптической оси, падает на первую линзу и, пройдя через систему, собирается в точке S. На сколько сместится эта точка, если поменять линзы местами?

680. Зрительная труба установлена на бесконечность. На какое расстояние надо передвинуть окуляр этой трубы, чтобы ясно видеть предметы, находящиеся на расстоянии 50 *м*? Фокусное расстояние объектива равно 50 *см*.

681. Объектив микроскопа имеет фокусное расстояние $F_1 = 3$ *мм*, а окуляр — фокусное расстояние $F_2 = 50$ *мм*. Расстояние между объективом и окуляром $l = 135$ *мм*, расстояние от предмета до объектива $a = 3{,}1$ *мм*. Найти линейное увеличение микроскопа.

§ 29. ФОТОМЕТРИЯ

Сила света точечного источника

$$I = \frac{\Phi}{\omega}, \tag{212}$$

где ω — телесный угол, а Φ — световой поток внутри этого угла.

Освещенность, создаваемая световым потоком Φ, падающим на площадь S, определяется отношением

$$E = \frac{\Phi}{S}. \tag{213}$$

Если поток распределяется по площади равномерно, то формула (213) дает освещенность в любой точке этой площади. В противном случае отношение $\frac{\Phi}{S}$ представляет среднюю освещенность площади S.

Освещенность, создаваемая точечным источником,

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha, \tag{214}$$

где r — расстояние до освещаемой площадки, а α — угол падения света на эту площадку.

682. На линзу фотообъектива села муха. Как это отразится на качестве снимка?

683. В той части спектра, где глаз человека наиболее чувствителен к свету ($\lambda = 0{,}555 \cdot 10^{-6}$ *м*), потоку в 1 *лм* соответствует мощность 0,00147 *вт*. Какую силу света имела бы лампа мощностью 40 *вт*, если бы вся потребляемая ею энергия превращалась в излучение с указанной длиной волны?

684. Освещенность Земли полной Луной составляет примерно 0,1 *лк*. Сила света наиболее мощных прожекторов достигает 2 млрд. *св*. Сравнить силу света Луны с силой света прожектора, считая, что земная атмосфера поглощает половину света, посылаемого Луной. (Расстояние от Земли до Луны 384 000 *км*.)

685. Диаметр объектива телескопа равен 60 *см*, а диаметр зрачка глаза равен 6 *мм*. Во сколько раз этот телескоп увеличивает видимую яркость звезд?

686. Лампа висит над центром стола. Когда она находилась в точке A, освещенность центра равнялась $E_1 = 36$ *лк*, а когда ее подняли в точку B, освещенность стала равной $E_2 = 16$ *лк*. Какой будет освещенность центра, если поместить лампу в точку, среднюю между A и B?

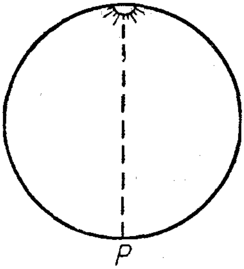


Рис. 260

687. В верхней точке полого шара помещается точечный источник света (рис. 260). Зная, что освещенность точки P равна E_0, найти среднюю освещенность шара.

688. Над центром круглого стола висит лампа на высоте $H = R$. Зная, что освещенность центра равна E_0, найти среднюю освещенность стола.

689. Точечный источник имеет силу света I. Какова сила света его изображения в плоском, идеально отражающем зеркале?

690. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы. Сила света источника равна 60 *св*, расстояние от источника до линзы равно 30 *см*, фокусное расстояние линзы равно 50 *см*. Как изменится сила света этого источника в результате действия линзы?

691. Решить предыдущую задачу, считая фокусное расстояние линзы равным 30 *см*. Объяснить полученный результат.

692. Свет, идущий от точечного источника, проходит через собирающую линзу и освещает экран (рис. 261). Сила света источника равна 60 *св*, расстояние от источника до линзы равно 0,3 *м*, фокусное расстояние линзы равно 0,5 *м*, расстояние от линзы до экрана равно 4,25 *м*. Найти освещенность экрана в точке P.

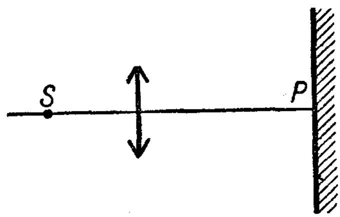


Рис. 261

693. В главном фокусе собирающей линзы находится точечный источник, освещающий экран (рис. 261). Сила света источника равна 100 *св*, фокусное расстояние линзы равно 0,5 *м*. Найти освещенность центра экрана.

694. Свет, идущий от точечного источника, проходит через собирающую линзу и освещает экран (рис. 261). Сила света источника $I = 27$ *св*, расстояние от источника до линзы $a = 30$ *см*, освещенность центра экрана $E = 300$ *лк*. Как изменится эта освещенность, если отодвинуть экран на 1 *м*?

695. В главном фокусе собирающей линзы находится точечный источник S, освещающий экран (рис. 261). Фокусное расстояние линзы равно 40 *см*, а расстояние от линзы до экрана — 80 *см*. Во сколько раз уменьшится освещенность точки P, если убрать линзу?

696. Точечный источник S освещает экран с помощью собирающей линзы (рис. 261). Сила света источника равна 10 *св*, фокусное расстояние линзы — 0,8 *м*, расстояние от источника до линзы — 1 *м*, расстояние от линзы до экрана — 2 *м*. Найти освещенность экрана в точке P.

697. Решить предыдущую задачу, считая, что слева от источника S находится плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси. Зеркало отстоит от точки S на 0,1 *м*.

698. Матовая лампа проецируется на экран с помощью собирающей линзы (рис. 262). Сила света лампы $I = 20$ *св*, расстояние от лампы до линзы $a = 2$ *м*, диаметр линзы $D = 10$ *см*. Зная, что изображение лампы имеет площадь 5 *см*^{2}, найти его освещенность.

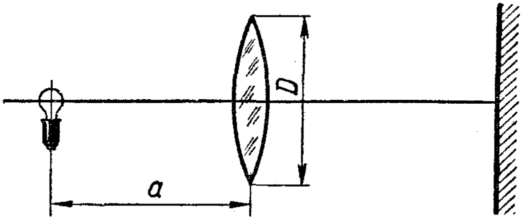


Рис. 262

699. Матовая лампа проецируется на экран с помощью собирающей линзы (см. рис. 262), дающей увеличение $k = 2$. Как изменится освещенность получаемого изображения, если поменять местами экран и лампу?

700. Предметы, отстоящие от уличного фонаря на 10 *м*, освещаются им вчетверо слабее, чем предметы, удаленные от него на 5 *м*. Однако с расстояния 10 *м* этот фонарь кажется столь же ярким, как с расстояния 5 *м*. Почему?

РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I
МЕХАНИКА

§ 1. КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Равномерное движение

1. $s = vt = 0{,}001$ *см/сек* $\cdot\ 24 \cdot 3600$ *сек* $= 86{,}4$ *см*.

2. Расстояние от Земли до Солнца $15 \cdot 10^{10}$ *м*, поэтому искомое время

$$t = \frac{15 \cdot 10^{10}\ м}{50\ \frac{м}{сек}} = 3 \cdot 10^9\ сек \approx 100\ \text{лет}.$$

3. За время Δt точка проходит путь $\Delta x = 5\Delta t$. Так как $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, то скорость будет равна $\frac{5\Delta t}{\Delta t} = 5\ \frac{м}{сек}$.

4. В момент встречи $x_1 = x_2$, следовательно,

$$10 + 2t = 4 + 5t,$$

откуда $t = 2$ *сек*.

5. Будем вести отсчет расстояний от пункта A, а отсчет времени — от 12 *ч* дня. Тогда первый поезд будет двигаться по закону

$$x_1 = v_1 t,$$

а второй — по закону

$$x_2 = s - v_2 (t - t_1),\ \text{где}\ t_1 = 2\ ч.$$

Так как в момент встречи $x_1 = x_2$, то

$$v_1 t = s - v_2 (t - t_1),$$

откуда после подстановки числовых данных получим $t = 5$ *ч*.

6. Спустя t *сек* расстояние между точками равно

$$s = \sqrt{(v_1 t)^2 + (v_2 t)^2} = 5t,$$

поэтому искомая скорость равна $v = \frac{s}{t} = 5$ *м/сек*.

7. Первая точка придет в начало координат через 5 *сек*, а вторая — через 1,25 *сек*. Значит, точки не встретятся.

8. В момент t расстояние между точками равно

$$d = \sqrt{(s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2}.$$

Под корнем стоит квадратичный трехчлен, минимум которого легко найти известными алгебраическими методами. Сделав это, получим:

$$d_{\min} = \sqrt{45} \approx 6{,}7 \ (см).$$

9. Из рис. 263 видно, что, когда прямая проходит расстояние s, точка A проходит расстояние $s' = s \operatorname{tg} 30^\circ$. Значит, скорость точки A равна $v \operatorname{tg} 30^\circ$.

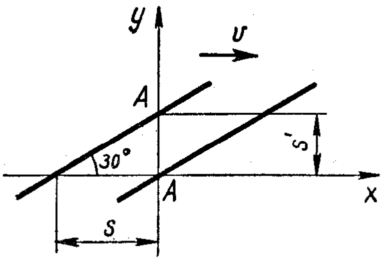


Рис. 263

2. Неравномерное и равнопеременное движение

10. Так как перемещение камня равно нулю, то равна нулю и его средняя скорость.

11. Первую половину пути поезд проходит за время

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1},$$

а вторую — за время

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2}.$$

Следовательно,

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}.$$

Тогда $v_{ср} = \frac{s}{t} = 48 \ км/ч$.

12. Если отсчитывать время от момента $t_0 = 3$ *сек*, то закон движения примет вид:

$$s = 5t^2,$$

где t — время, отсчитываемое от указанного момента. Отсюда следует, что $a = 10 \ м/сек^2$.

13. Положив $t = 0$, видим, что в начальный момент времени точка имела координату $x_0 = 2$ *м*. Следовательно, перемещение точки равно

$$s = x - x_0 = -10t + 3t^2 \ (м).$$

Сравнивая это соотношение с формулой

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2},$$

приходим к выводу, что $v_0 = -10$ *м/сек*, $a = 6$ *м/сек*^{2}.

14. Примем за положительное направление снизу вверх. Тогда в уравнении

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$v_0 = 24{,}5 \text{ м/сек}, \ a = -9{,}8 \text{ м/сек}^2,$$
$$s = 29{,}4 \text{ м}.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$t_1 = 2 \text{ сек}, \ t_2 = 3 \text{ сек}.$$

Значит, камень побывает на этой высоте дважды: первый раз через 2 *сек* (поднимаясь вверх) и второй раз через 3 *сек* (опускаясь вниз).

15. Будем считать положительным направление вверх. Тогда в уравнении

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$$v_0 = 9{,}8 \text{ м/сек}, \ a = -9{,}8 \text{ м/сек}^2, \ s = -14{,}7 \text{ м}.$$

Решение уравнения дает

$t = 3$ *сек*. (Второй корень отрицателен.)

16. Считая положительным направление вниз, будем иметь:

$$s = v_0t + \frac{gt^2}{2}.$$

Положив здесь $s = 30$ *м*, $t = 2$ *сек*, получим: $v_0 = 5{,}2$ *м/сек*, а положив $s = 10$ *м*, получим: $v_0 = -4{,}8$ *м/сек*. Значит, в первом случае камень надо бросать вниз, а во втором — вверх.

17. Положив в формуле

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}$$

$v_0 = 10{,}5$ *м/сек*, $a = 1$ *м/сек*^{2}, $t = -1$ *сек*, получим $s = -10$ *м*. Значит, секунду назад автомобиль находился за 10 *м* от того места, где он находится сейчас.

18. Положив в формуле

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

$s = 10$ *м*, $v_0 = 10$ *м/сек*, $t = 2$ *сек*, получим: $a = -5$ *м/сек*^{2}.

Следовательно, ускорение этой точки должно быть направлено в отрицательную сторону оси x.

19. В уравнении

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$v_0 = 14$ *м/сек*, $a = -9{,}8$ *м/сек*^{2}, $t = 2$ *сек*.

Тогда искомая высота будет равна $h = 8{,}4$ *м*.

Положив теперь в равенствах

$$v^2 - v_0^2 = 2aH, \; v - v_0 = at'$$

$v = 0$, $v_0 = 14$ *м/сек*, $a = -9{,}8$ *м/сек*^{2}, найдем, что максимальная высота подъема $H = 10$ *м*, а время подъема на эту высоту $t' = 1{,}43$ *сек* < 2 *сек*. Следовательно, путь, пройденный телом, равен

$$s = H + (H - h) = 10 + 1{,}6 = 11{,}6 \text{ м}.$$

20. Из равенств

$$v_1^2 = 2as, \; v_2^2 = 2a \cdot 2s,$$

где v_1 и v_2 — скорости в конце первого и второго километров, получим:

$$v_2 = v_1 \sqrt{2} = 10 \text{ м/сек } \sqrt{2} = 14{,}14 \text{ м/сек}.$$

Следовательно, $v_2 - v_1 = 14{,}14 \frac{м}{сек} - 10 \frac{м}{сек} = 4{,}14 \frac{м}{сек}$.

21. Из формулы $v^2 - v_0^2 = 2as$ находим:

$$a_1 = \frac{\left(10 \frac{м}{сек}\right)^2 - 0}{2 \cdot 1\,000 \text{ м}} = 0{,}05 \frac{м}{сек^2},$$

$$a_2 = \frac{\left(10 \frac{м}{сек} + 5 \frac{м}{сек}\right)^2 - \left(10 \frac{м}{сек}\right)^2}{2 \cdot 1\,000 \text{ м}} = 0{,}0625 \frac{м}{сек^2}.$$

Следовательно, $a_2 > a_1$.

22. Положив в формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$h = 10$ *м*, $t = 2$ *сек*, $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, получим: $v_0 = 14{,}8$ *м/сек*. Далее из формулы $v = v_0 - gt$ найдем: $v = 14{,}8 - 9{,}8 \cdot 2 = -4{,}8$ (*м/сек*).

Отрицательный знак показывает, что через 2 *сек* это тело будет двигаться вниз. Значит, двигаясь вверх, подняться за 2 *сек* на 10 *м* невозможно.

23. Рассмотрев движение тела на участке от $x_2 = 2$ *м* до $x_3 = 3$ *м*, будем иметь: $v_3^2 - v_2^2 = 2a(x_3 - x_2)$, $\left(3 \frac{м}{сек}\right)^2 - \left(2 \frac{м}{сек}\right)^2 = 2a \cdot 1$ *м*, откуда $a = 2{,}5$ *м/сек*^{2}.

Далее, предполагая, что тело было в точке $x_1 = 1$ *м*, получим:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1),$$

$$\left(2\,\frac{м}{сек}\right)^2 - v_1^2 = 2\cdot 2{,}5\,\frac{м}{сек^2}\cdot 1\,м, \text{ откуда } v_1 = \sqrt{-1}\,\frac{м}{сек}.$$

Значит, тело в этой точке не было.

24. Путь, пройденный за n-ю секунду, равен

$$s_n = v_0 n + \frac{an^2}{2} - \left[v_0(n-1) + \frac{a(n-1)^2}{2}\right] = an + v_0 - \frac{a}{2}.$$

Так как s_n по условию должно равняться n, то

$$an + v_0 - \frac{a}{2} = n,$$

откуда

$$a = 1,$$

$$v_0 - \frac{a}{2} = 0.$$

Из двух последних равенств получаем: $v_0 = 0{,}5$ *м/сек*.

25. Будем отсчитывать расстояния от точки A, а время — от момента выхода первого тела. Направление от A к B будем считать положительным. Тогда для первого тела

$$x_1 = v_1 t + \frac{a_1 t^2}{2},$$

а для второго

$$x_2 = s - v_2(t - 1\ сек).$$

Так как в момент встречи $x_1 = x_2$, то

$$v_1 t + \frac{a_1 t^2}{2} = s - v_2(t - 1\ сек),$$

откуда $t = 7$ *сек*. Второй корень, как отрицательный, отпадает.

3. Графики движения

26. В интервале от $t = 0$ до $t = t_1$ тело двигалось в положительном направлении с уменьшающейся скоростью. В момент $t = t_1$ тело начало двигаться обратно; скорость этого движения сначала увеличивалась (до момента $t = t_2$), а затем стала уменьшаться. В момент $t = t_3$ тело остановилось.

27. Путь точки равен 3 *м*. Перемещение точки равно 1 *м*, а ее средняя скорость составляет 0,25 *м/сек*.

28. В интервале от $t = 0$ до $t = t_1$ уменьшается как алгебраическая величина скорости, так и ее абсолютная величина; ускорение здесь отрицательное и движение замедленное. В интервале от

$t = t_1$ до $t = t_2$ алгебраическая величина скорости уменьшается, а абсолютная — увеличивается; ускорение здесь отрицательно, а движение ускоренное. В интервале от $t = t_2$ до $t = t_3$ алгебраическая величина скорости увеличивается, абсолютная — уменьшается, т. е. ускорение положительно, а движение замедленное.

29. Точки встретились в момент $t = t_2$. Скорость точки *1* была в этот момент большей (так как при $t = t_2$ ее график идет круче).

30. Из графика видно, что при перемещении тела на единицу длины его скорость возрастает на одну и ту же величину как в точке $x = x_1$, так и в точке $x = x_2$. Но в первой из этих точек скорость тела меньше и поэтому для перемещения на единицу длины требуется большее время. Значит, в точке $x = x_1$ ускорение меньше.

§ 2. КИНЕМАТИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

31. Подставив в данные уравнения значения $x = 10$, $y = 15$, получим:

$$10 = 2t + 6, \quad 15 = t^2.$$

Так как эти равенства противоречат друг другу, то рассматриваемая траектория не проходит через точку $x = 10$, $y = 15$.

32. В момент встречи $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Следовательно,

$$2t = t + 1, \; 5t = t^2 + 4.$$

Полученная система двух уравнений (с одной неизвестной величиной) удовлетворяется при $t = 1$. Значит, в момент $t = 1$ точки встретятся.

33. Первое уравнение показывает, что горизонтальная скорость точки равна

$$v_x = 3 \; м/сек.$$

Из второго уравнения следует, что вертикальная скорость этой точки равна

$$v_y = 4 \; м/сек.$$

Сложив эти скорости по правилу параллелограмма, получим:

$$v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \; (м/сек).$$

34. Будем считать, что камень брошен из начала координат. Тогда его кинематические уравнения движения будут иметь вид:

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t,$$
$$y = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Так как в момент падения $x = 10$ *м*, $y = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} 10\; м &= \left(14 \frac{м}{сек} \cos\alpha\right) t, \\ 0 &= \left(14 \frac{м}{сек} \sin\alpha\right) t - \frac{9{,}8 \frac{м}{сек^2} t^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Получилась система двух уравнений с двумя неизвестными. (Так как нас интересует не t, а α, то целесообразно сначала исключить из этих уравнений t.) Решив ее, найдем два значения: $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

35. Так же, как в предыдущей задаче, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 10\ м &= \left(14\ \frac{м}{сек}\cos\alpha\right)t, \\ 7{,}5\ м &= \left(14\ \frac{м}{сек}\sin\alpha\right)t - \frac{9{,}8\ \frac{м}{сек^2}\ t^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее, найдем: $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha \approx 64°$.

36. Движение снаряда описывается уравнениями

$$x = (v_0\cos\alpha)\ t,$$

$$y = (v_0\sin\alpha)\ t - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразив из первого уравнения t и подставив во второе, получим:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы. (Пользуясь полученным уравнением, можно было бы решить задачи 34 и 35.)

37. Из уравнения

$$\frac{gt^2}{2} = h$$

находим $t=5/7$ *сек*. Значит, $v_0 = \frac{s}{t} = 10\ м : (5/7)\ сек = 14\ м/сек$.

Горизонтальная составляющая конечной скорости равна $v_x = v_0 = 14$ *м/сек*, а вертикальная равна $v_y = -gt = -9{,}8\ м/сек^2 \times 5/7\ сек = -7\ м/сек$.

Значит,

$$v = \sqrt{\left(14\ \frac{м}{сек}\right)^2 + \left(7\ \frac{м}{сек}\right)^2} \approx 15{,}7\ \frac{м}{сек}.$$

38. Спустя время t скорость камня будет равна

$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}.$$

Подставив сюда значение $v = 8$ *м/сек*, $v_0 = 10$ *м/сек*, $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, $t = 1$ *сек*, найдем: $\sin\alpha \approx 0{,}67$, $\alpha \approx 42°$.

39. Тело будет двигаться вверх в течение времени $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Подставив это значение в уравнение $h = (v_0 \sin \alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}$, найдем, что максимальная высота подъема равна

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Дальность полета равна $(v_0 \cos \alpha)\, 2t$, т. е.

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

40. Из ответов к предыдущей задаче следует, что $\frac{L}{H} = 4 \operatorname{ctg} \alpha$. Подставив сюда $\frac{L}{H} = 3$, найдем: $\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}75$, $\alpha \approx 53°$.

41. $\alpha = 45°$. (См. решение задачи 39.)

42. Пусть точка падения снаряда имеет координаты x, y, а время движения снаряда равно t. Тогда будем иметь:

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t,$$

$$y = (v_0 \sin \alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Кроме того, очевидно,

$$y = x \operatorname{tg} \varphi.$$

Получилась система трех уравнений с тремя неизвестными, из которой можно определить x, y и t. Решив ее, найдем:

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha\, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi).$$

43. Будем считать, что орудие находится в начале координат. Тогда движение снаряда будет описываться уравнениями

$x_1 = (v_0 \cos \alpha) t$, $y_1 = (v_0 \sin \alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}$, а движение самолета — уравнениями

$$x_2 = vt, \ y_2 = h.$$

Так как в момент попадания $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, то

$$(v_0 \cos \alpha)\, t = v_0\, t,$$

$$(v_0 \sin \alpha)\, t - \frac{gt^2}{2} = h.$$

Из первого уравнения находим: $\cos \alpha = 0{,}222$, $\alpha \approx 77°$. (Второе уравнение позволяет найти время движения снаряда.)

§ 3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Вращение вокруг неподвижной оси

44. Лампа дневного света вспыхивает 100 раз в секунду (так как городской ток имеет частоту 50 *гц*). За время 0,01 *сек* вентилятор повернется на угол

$$\frac{360^\circ \cdot 2000}{60} \cdot 0{,}01 = 120^\circ,$$

т. е. его лопасти окажутся в том же положении, какое они занимали 0,01 *сек* назад (так как вентилятор трехлопастный). Следовательно, вентилятор будет казаться неподвижным.

45. 1) $a = \omega^2 R$, $a = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3\,600}\right)^2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \approx 0{,}034$ (*м/сек²*).

2) Так как $9{,}8/0{,}034 = 288$, то угловая скорость Земли должна увеличиться в $\sqrt{288}$ раз, т. е. примерно в 17 раз.

46. Подставив в формулу $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = 3600 \cdot 2\pi$ и $t = 2 \cdot 60$ *сек*, получим: $\varepsilon = \pi$ *сек*$^{-2}$.

47. Подставив в формулу $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$ значения $\omega = 0$, $\omega_0 = 2\pi$ *сек*$^{-1}$, $\varphi = 10 \cdot 2\pi$, получим: $\varepsilon = -0{,}1$ *сек*$^{-2}$.

48. Так как вторая шестерня имеет вдвое меньше зубьев, то ее угловая скорость вдвое больше, т. е. равна 6 *сек*$^{-1}$. Так как угловая скорость второй шестерни вдвое больше угловой скорости первой шестерни в *любой момент*, то ее угловое ускорение тоже вдвое больше, чем у первой шестерни, т. е. равно 1 *сек*$^{-2}$.

49. Так как $R/r = 75/30 = 2{,}5$, то угловая скорость паровой машины должна быть равна $300/2{,}5 = 120$ *об/мин*. Выразив ее в радианах в секунду, получим $\omega = 4\pi$ *сек*$^{-1}$. Далее из равенства $\omega = \varepsilon t$ найдем: $t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{4\pi}{0{,}4\pi} = 10$ *сек*.

50. В момент $t = 10$ *сек* угловая скорость колеса равна $\omega = v/R = 100/1 = 100$ (*сек*$^{-1}$). Угловое ускорение колеса равно $\varepsilon = \omega/t = 100/10 = 10$ (*сек*$^{-2}$). Значит,

$$a_t = \varepsilon R = 10 \cdot 1 = 10 \text{ (м/сек}^2\text{)}$$

(в любой момент). Далее, в момент $t = 15$ *сек* угловая скорость $\omega = 10 \cdot 15 = 150$ (*сек*$^{-1}$). В этот момент будем иметь:

$$v = \omega R = 150 \cdot 1 = 150 \text{ (м/сек)},$$

$$a_n = \omega^2 R = 150^2 \cdot 1 = 22\,500 \text{ (м/сек}^2\text{)}.$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{10^2 + 22500^2} \approx 22\,500 \text{ (м/сек}^2\text{)}.$$

51. Касательное ускорение этой точки $a_t = \varepsilon R = 3 \cdot 20 = 60$ (*см/сек²*). Значит, ее нормальное ускорение должно равняться

$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{\left(75\frac{см}{сек^2}\right)^2 - \left(60\frac{см}{сек^2}\right)^2} = 45$ $см/сек^2$. Далее, так как $a_n = \omega^2 R$, то $\omega = \sqrt{45/20} = 1{,}5$ ($сек^{-1}$) и $t = \omega/\varepsilon = 1{,}5/3 = 0{,}5$ (*сек*).

52. Пусть α — угол между вектором скорости и вектором ускорения этой точки. Из рис. 8 видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 R}{\varepsilon R} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$

В данном случае $\omega = \varepsilon t$, и поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon t^2$. Подставив сюда $\alpha = 45°$ и $\varepsilon = 0{,}04$ $сек^{-2}$, получим: $t = 5$ *сек*.

53. При решении предыдущей задачи было найдено, что $\operatorname{tg}\alpha = \omega^2/\varepsilon$. Так как в данном случае $\omega^2 = 2\varepsilon\varphi$, то $\operatorname{tg}\alpha = 2\varphi = 2 \cdot 2\pi$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 4\pi \approx 85°$.

54. В момент t груз будет иметь скорость $v = at$, а шкив будет иметь угловую скорость $\omega = \frac{v}{r} = \frac{at}{r}$. Из этого выражения видно, что шкив вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Поэтому для точки M

$$a_t = \varepsilon R = a\frac{R}{r}, \quad a_n = \omega^2 R = \left(\frac{at}{r}\right)^2 R.$$

Подставив сюда значения $a = 2$ $м/сек^2$, $r = 0{,}25$ *м*, $R = 0{,}5$ *м*, $t = 0{,}5$ *сек*, найдем: $a_t = 4$ $м/сек^2$, $a_n = 8$ $м/сек^2$ и $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \approx 8{,}9$ $м/сек^2$.

2. Мгновенный центр вращения

55. Диск вращается вокруг мгновенного центра C с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{OC}$. Скорость точки B

$$v_B = \omega BC = \left(\frac{v}{OC}\right) BC = v\sqrt{2}.$$

Эта скорость направлена перпендикулярно радиусу вращения точки B, т. е. перпендикулярно отрезку BC.

56. Колесо вращается вокруг точки C, являющейся мгновенным центром вращения в данный момент времени. Так как колесо катится вправо, то это вращение совершается по часовой стрелке, из чего заключаем, что скорость точки B направлена влево (перпендикулярно радиусу вращения BC). Величина этой скорости равна $v_B = \omega BC$, и так как $\omega = \frac{v}{OC}$, то

$$v_B = \frac{v}{OC} BC = v\frac{R - r}{r}.$$

57. Мгновенным центром вращения малого колеса является точка касания колес. Следовательно, мгновенный радиус вращения точки B вдвое больше мгновенного радиуса вращения точки A, из чего заключаем, что

$$v_B = 2v_A = 2\omega\,(R + r) = 100 \text{ см/сек}.$$

58. Пусть B — точка соприкосновения колес 1 и 3. Так как мгновенным центром вращения колеса 1 служит точка C, а расстояние BC вдвое больше расстояния AC, то

$$v_B = 2v_A = 2\omega\,(R + r),$$

где ω — угловая скорость кривошипа OA. Но точка B принадлежит и колесу 3. Поэтому

$$\omega_3 = \frac{v_B}{r} = 2\omega\frac{R + r}{r}.$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{2\,(R + r)}{r} = 6.$$

59. Рассмотрим движение этой системы с позиции наблюдателя, находящегося на нижней рейке. Он видит, что скорость точки A равна $v_1 - v_2 = 2$ *м/сек*, а скорость точки O равна 1 *м/сек* (так как для наблюдателя, находящегося на нижней рейке, движение диска есть вращение вокруг мгновенного центра B, а расстояние OB вдвое меньше расстояния AB). Но так как нижняя рейка имеет скорость 4 *м/сек*, то скорость точки O по отношению к земле равна $4 + 1 = 5$ *м/сек*.

60. Скорость верхней точки каждого катка равна скорости платформы, а скорость центра катка вдвое меньше скорости его верхней точки, т. е. вдвое меньше скорости платформы. Поэтому когда платформа передвинется на 10 *см*, каждый каток сместится на 5 *см*.

61. Не будет. Если бы она стала скатываться, то начала бы вращаться вокруг мгновенного центра вращения C против часовой стрелки. Но тогда точка B стала бы удаляться от точки A, т. е. нить AB стала бы растягиваться, что невозможно.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

1. Сложение скоростей

62. Из рис. 17 видно, что скорости $v_{\text{отн}}$ и $v_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{отн}} + v^2_{\text{пер}}},$$

где $v_{\text{отн}} = 30$ *см/сек* и $v_{\text{пер}} = \omega\, OM = 4 \cdot 10 = 40$ *см/сек*. Следовательно,

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{\left(30\frac{\text{см}}{\text{сек}}\right)^2 + \left(40\frac{\text{см}}{\text{сек}}\right)^2} = 50\,\frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

63. Так как автомобили движутся поступательно, то искомая скорость равна

$$\vec{u} = \vec{v}_A - \vec{v}_B.$$

Учитывая, что вектор $\vec{v}_A$ направлен на север, а вектор $\vec{v}_B$ — на восток, приходим к параллелограмму скоростей, показанному на рис. 264. Следовательно, скорость u равна

$$u = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{\left(60\,\frac{км}{ч}\right)^2 + \left(80\,\frac{км}{ч}\right)^2} = 100\,\frac{км}{ч}$$

(и направлена приблизительно на северо-запад).

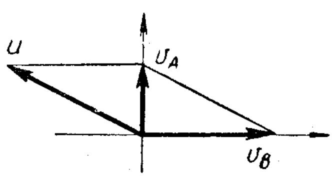


Рис. 264

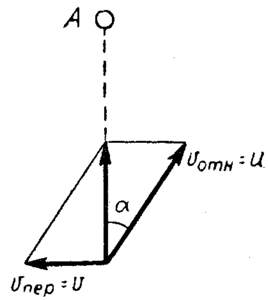


Рис. 265

64. Так как переносная скорость пули есть скорость движущейся платформы, а абсолютная скорость пули должна быть направлена на цель, то приходим к результату, показанному на рис. 265. Из чертежа получаем:

$$\sin\alpha = \frac{v}{u} = \frac{30}{800} = 0{,}0375, \quad \alpha = 2^\circ 9'.$$

65. Вектор абсолютной скорости шара направлен влево и имеет величину 7 *м/сек*. Найдем вектор переносной скорости. Так как переносным движением является вращение платформы, то переносная скорость шара есть скорость того места «на платформе», где находится сейчас этот шар. Иначе говоря, мы должны вообразить, что шар жестко связан с платформой, и найти при этом предположении его скорость. Это и будет переносная скорость шара A. Отсюда следует, что вектор $\vec{v}_{пер}$ направлен перпендикулярно OA и имеет величину

$$v_{пер} = \omega\, OA = 3\ сек^{-1} \cdot 8\ м = 24\ м/сек.$$

Так как векторы $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{v}_{\text{пер}}$ должны в сумме дать вектор $\vec{v}_{\text{абс}}$, то (см. рис. 266)

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_{\text{абс}}^2 + v_{\text{пер}}^2} = \sqrt{\left(7\,\frac{м}{сек}\right)^2 + \left(24\,\frac{м}{сек}\right)^2} = 25\,\frac{м}{сек}.$$

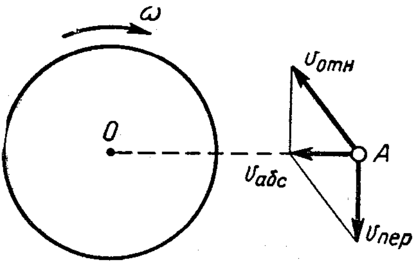


Рис. 266

66. Абсолютная скорость спутника равна 6 *км/сек*. Найдем его переносную скорость. Так как переносным движением является вращение планеты, то переносная скорость спутника есть скорость того места «на планете», где находится спутник. Иначе говоря, нужно вообразить, что спутник жестко связан с планетой, и вычислить при этом предположении его скорость. Следовательно,

$$v_{\text{пер}} = \omega R_2 = \frac{v_2}{R_1} R_2 = 2\,\frac{км}{сек}$$

(ω — угловая скорость планеты). Далее, так как скорости $v_{\text{абс}}$ и $v_{\text{пер}}$ направлены в одну сторону (см. рис. 267), то

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{абс}} - v_{\text{пер}} = 6\,\frac{км}{сек} - 2\,\frac{км}{сек} = 4\,\frac{км}{сек}.$$

67. Так как движущейся системой отсчета является вагон A, вращающийся вокруг точки O, то переносная скорость вагона B равна

$$v_{\text{пер}} = \omega \cdot OB = \frac{v_A}{OA} \cdot OB = 84\ км/ч$$

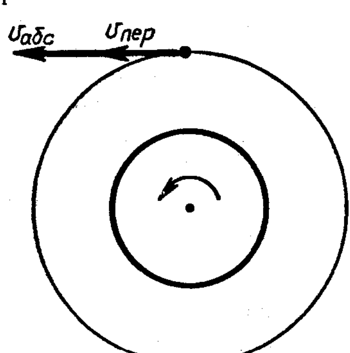


Рис. 267

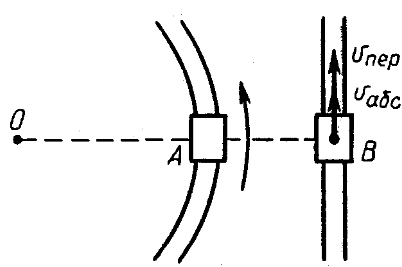


Рис. 268

(рис. 268). Так как абсолютная скорость вагона B направлена в ту же сторону и равна 60 *км/ч*, то искомая относительная скорость вагона B равна 24 *км/ч* (и направлена назад).

(В этой задаче вагон B рассматривался как точка, а вагон A — как тело, с которым связана система отсчета.)

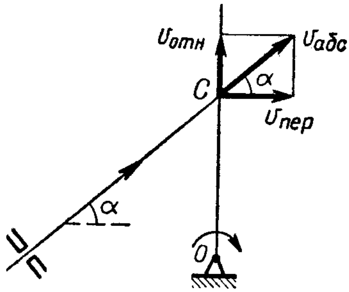


Рис. 269

68. Нас интересует скорость $v_{\text{отн}}$ зайчика относительно экрана. Абсолютная скорость зайчика направлена вдоль луча (так как зайчик в каждый момент времени находится на этом луче), а его переносная скорость перпендикулярна экрану и равна $v_{\text{пер}} = \omega OC = \omega a$ (скорость того места на экране, где находится зайчик). Таким образом, получается параллелограмм скоростей, показанный на рис. 269. Из него находим:

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{пер}} \operatorname{tg} \alpha = \omega a \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Сложение ускорений

69. Так как переносное ускорение яблока равно нулю (ибо равно нулю ускорение вагона), то относительное ускорение яблока совпадает с его абсолютным ускорением. Следовательно, оно равно g и направлено вниз.

70. Переносное ускорение яблока равно a и направлено горизонтально, а абсолютное ускорение равно g и направлено вниз (рис. 270). Следовательно,

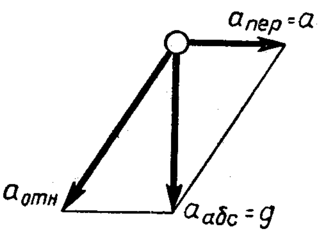


Рис. 270

$$a_{\text{отн}} = \sqrt{a^2 + g^2}.$$

71. Верхняя точка колеса участвует в двух движениях: в движении вместе с кузовом автомобиля и в движении относительно кузова автомобиля. Поэтому ее ускорение равно

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Но $a_{\text{пер}} = 0$ (так как кузов автомобиля движется с постоянной скоростью). Следовательно,

$$a_{\text{абс}} = a_{\text{отн}} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(20\ \frac{м}{сек}\right)^2}{0{,}25\ м} = 1600\ м/сек^2$$

(v — линейная скорость точек колеса относительно автомобильного кузова; она, очевидно, равна скорости автомобиля).

72. Как и в предыдущей задаче, будем иметь:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Пусть автомобиль движется вправо. Тогда вектор $\vec{a}_{\text{пер}}$ будет направлен вправо и будет иметь величину 1 *м/сек*^{2}. Относительное же ускорение $a_{\text{отн}}$ состоит из касательного и нормального, причем первое направлено вправо и имеет величину 1 *м/сек*^{2}, а второе равно нулю, так как $a_n = v^2/R$, а $v = 0$ (начальный момент движения). Следовательно, абсолютное ускорение верхней точки равно 2 *м/сек*^{2} и направлено вправо.

73. Относительное ускорение человека равно $\omega^2 R$ и направлено к центру платформы. Переносное ускорение человека также равно $\omega^2 R$ и направлено в ту же сторону. Следовательно, их геометрическая сумма равна $2\omega^2 R$. Однако абсолютное ускорение человека равно нулю (так как относительно земли он все время остается на одном и том же месте).

§ 5. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1. Прямолинейное движение точки

74. Так как максимально возможная сила трения равна $kmg = 0{,}8\,mg$, то искомое ускорение равно

$$a = \frac{0{,}8mg}{m} = 0{,}8g.$$

75. Проведем оси x и y, как показано на рис. 22. Кроме сил P и N, изображенных на рисунке, на брусок действует сила трения kN, направленная в отрицательную сторону оси x. Проецируя действующие силы на оси x и y, получим:

$$P\sin\alpha - kN = ma, \quad -P\cos\alpha + N = 0.$$

Подставив сюда $P = mg$ и решив полученную систему уравнений, найдем:

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha), \quad N = mg\cos\alpha.$$

(При решении этой задачи предполагалось, что трение невелико и поэтому не способно удержать брусок в равновесии.)

76. На кирпич действуют сила тяжести mg и реакция пола N. Следовательно, $N - mg = ma$, откуда $N = m(a + g)$. Сила давления кирпича на пол имеет такую же величину.

77. Пусть лифт движется с замедлением a. Считая, что шар не покидает пола лифта, получаем уравнение

$$N - mg = -ma,$$

где N — реакция пола. (Направление вверх считаем положительным и поэтому пишем a со знаком минус.) Следовательно,

$$N = m(g - a).$$

Полученное равенство показывает, что при $a = g$ шар перестает давить на пол. Значит, при $a > g$ шар подпрыгнет.

78. Пусть натяжение каждой нити равно T (рис. 271). Проецируя действующие силы на ось y, получаем:

$$2T\cos\alpha - mg = ma,\ T = m\frac{g+a}{2\cos\alpha}.$$

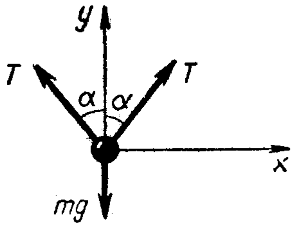


Рис. 271

79. На брусок действуют силы mg и N, равнодействующая которых F должна быть горизонтальна, ибо брусок не скользит по плоскости и поэтому движется с тем же ускорением, что и плоскость. Из рис. 272 получаем:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = ma,\ a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

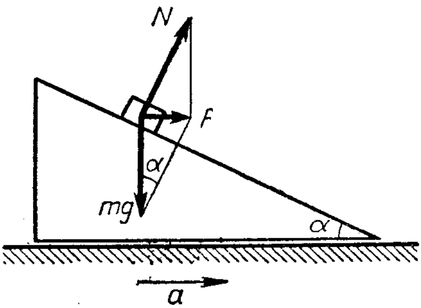


Рис. 272

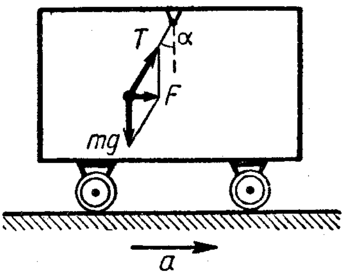


Рис. 273

80. На маятник действуют сила тяжести mg и натяжение нити T (рис. 273). Так как маятник неподвижен относительно вагона, то его ускорение равно a и направлено вправо. Следовательно, сила F, равная ma, тоже направлена вправо. Далее, из чертежа получаем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

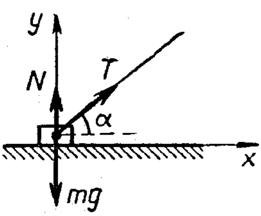


Рис. 274

81. На брусок действуют: сила тяжести mg, реакция плоскости N и натяжение нити T (рис. 274). Проецируя действующие силы на оси x, y, получаем:

$$T\cos\alpha = ma,\ N - mg + T\sin\alpha = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$T = m\frac{a}{\cos\alpha},\quad N = m(g - a\,\mathrm{tg}\,\alpha).$$

(Из полученного ответа видно, что если $a = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $N = 0$.)

82. В этом случае к силам mg, N, T, показанным на рис. 274, добавится сила трения kN, направленная в отрицательную сторону оси x. Поэтому получим:

$$T\cos\alpha - kN = ma, \quad N - mg + T\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$T = m\frac{a + kg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}, \quad N = m\frac{g\cos\alpha - a\sin\alpha}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

83. На брусок действуют силы mg, N и T (рис. 275). Ускорение бруска равно a и направлено вправо. Выбрав оси x, y, как показано на чертеже, получим:

$$T - mg\sin\alpha = ma\cos\alpha,$$
$$N - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$T = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha), \quad N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha).$$

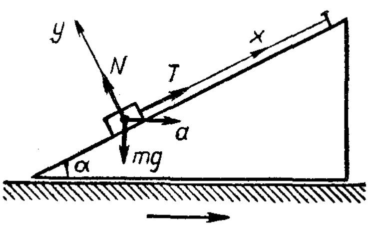


Рис. 275

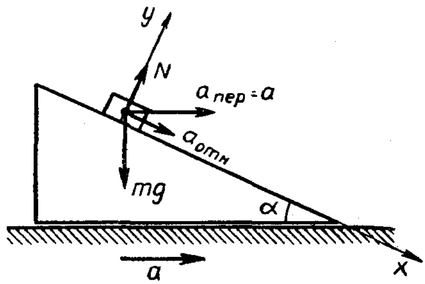


Рис. 276

84. Абсолютное ускорение бруска состоит из переносного ускорения, равного ускорению наклонной плоскости, и относительного ускорения, направленного вдоль плоскости (рис. 276). Проецируя силы и ускорения на оси x, y, показанные на чертеже, получим:

$$mg\sin\alpha = m(a_{\text{отн}} + a\cos\alpha),$$
$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha,$$

откуда

$$a_{\text{отн}} = g\sin\alpha - a\cos\alpha, \quad N = m(g\cos\alpha + a\sin\alpha).$$

85. Пусть натяжение нити равно T. Тогда будем иметь:

$$F - T = m_1 a, \qquad T = m_2 a,$$

откуда

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}, \qquad T = F\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

86. В первом случае натяжение нити будет равно

$$T = F\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

а во втором —

$$T' = F\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

(см. решение предыдущей задачи). Следовательно,

$$T + T' = F,\ T' = F - T = 70\ н.$$

87. Пусть натяжение правой нити равно T_1, а левой — T_2. Тогда на блок будет действовать сила T_1, стремящаяся вращать блок по часовой стрелке, и сила T_2, стремящаяся вращать его против часовой стрелки. Но так как блок невесом, то все действующие на него силы уравновешены, из чего заключаем, что $T_1 = T_2$. Полагая $T_1 = T_2 = T$, будем иметь следующие уравнения движения грузов:

$$m_1g - T = m_1a,\ T - m_2g = m_2a.$$

Из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными находим:

$$a = g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2},\quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

88. Пусть a — ускорение каждого груза относительно кабины лифта. Тогда правый груз будет иметь абсолютное ускорение $w - a$, а левый—абсолютное ускорение $w+a$. Каждое из этих ускорений считаем направленным вверх, т. е. считаем, что $w > a$. Поэтому получим следующие уравнения движения:

$$T - m_1g = m_1(w-a),$$
$$T - m_2g = m_2(w+a).$$

Решив их, найдем:

$$a = (g+w)\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2},\quad T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g+w).$$

89. Так как масса левого груза и блока мала по сравнению с массой правого груза, то правый груз будет опускаться с ускорением a, которое можно считать равным g. Так как левый груз будет подниматься с тем же ускорением, то

$$T - mg = ma,$$

где $a = g$, а T — искомое натяжение. Следовательно, $T = 2\ mg$.

90. В сущности эта задача ничем не отличается от задачи 87. Поэтому,

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g = \frac{2P_1P_2}{P_1+P_2} = 12\ н.$$

91. Пусть натяжение веревки равно T, а ускорение груза равно a. Тогда для груза будем иметь:

$$T - mg = ma.$$

Человек движется вверх с абсолютным ускорением $a_{абс} = a_{отн} - a = g - a$. Поэтому

$$T - 2mg = 2m\ (g - a).$$

Из этих двух уравнений с двумя неизвестными найдем: $a = g$. Следовательно, абсолютное ускорение человека

$$a_{абс} = a_{отн} - a = g - g = 0.$$

92. Пусть натяжение нити (сила, движущая верхний груз) равно T. Тогда движение грузов будет описываться уравнениями:

$$T = \frac{P}{g}a, \quad Q - T = \frac{Q}{g}a,$$

где a — ускорение грузов. Подставив сюда $P = 100$ *н*, $T = 90$ *н*, получим систему уравнений с неизвестными Q и a. Решив ее, найдем: $Q = 900$ *н*.

93. В этом случае будем иметь:

$$T - kP = \frac{P}{g}a, \quad Q - T = \frac{Q}{g}a.$$

Положив $P = 100$ *н*, $T = 90$ *н*, $k = 0{,}2$, найдем: $Q = 300$ *н*.

94. На верхний груз действуют: сила тяжести P, направленная вниз, реакция N горизонтальной плоскости, направленная вверх, и натяжение нити T, направленное вправо. Ускорение этого груза состоит из переносного ускорения a, направленного вверх, и относительного ускорения $a_{отн}$, направленного вправо. Проецируя эти силы и ускорения на горизонтальное направление, получим:

$$T = \frac{P}{g}a_{отн}.$$

На нижний груз действует натяжение нити T и сила тяжести Q. Ускорение этого груза равно $a - a_{отн}$ (если считать это ускорение направленным вверх). Поэтому

$$T - Q = \frac{Q}{g}(a - a_{отн}).$$

Исключив из двух полученных уравнений $a_{отн}$, найдем:

$$T = \frac{PQ}{P + Q}\cdot\frac{a + g}{g}.$$

95. Пусть ускорение грузов равно a, натяжение нити равно T, реакция наклонной плоскости равна N_P и реакция горизонтальной плоскости равна N_Q. Рассматривая движение груза P, направим ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно этой плоскости. Тогда получим:

$$mg\sin\alpha - T = ma, \quad N_P - mg\cos\alpha = 0.$$

Переходя к грузу Q, направим ось x по горизонтали, а ось y — по вертикали. Тогда будем иметь:

$$T = Ma, \quad N_Q - Mg = 0.$$

Из полученной системы четырех уравнений найдем:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m+M}, \quad T = \frac{mMg\sin\alpha}{m+M},$$

$$N_P = mg\cos\alpha, \quad N_Q = Mg.$$

96. Пусть натяжение нити, несущей груз, равно T. Тогда к блоку будут приложены вращающие моменты Fr и TR. Но так как масса блока равна нулю, то все приложенные к нему силы должны быть уравновешены. Следовательно,

$$Fr - TR = 0,$$

откуда $T = \frac{Fr}{R}$. Поэтому ускорение груза равно

$$a = \frac{\frac{Fr}{R} - mg}{m} = \frac{Fr - mgR}{mR}.$$

97. Пусть ускорение правого груза равно a_1, а левого — a_2. Натяжение правой нити обозначим через T_1, а левой — через T_2. Тогда будем иметь:

$$m_1g - T_1 = m_1a_1, \quad T_2 - m_2g = m_2a_2.$$

Так как блок невесом, то

$$T_1R = T_2r$$

и, кроме того, очевидно

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R}{r}.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем:

$$a_1 = \frac{(m_1R - m_2r)R}{m_1R^2 + m_2r^2}g, \quad a_2 = \frac{(m_1R - m_2r)r}{m_1R^2 + m_2r^2}g,$$

$$T_1 = \frac{m_1m_2gr(R+r)}{m_1R^2 + m_2r^2}, \quad T_2 = \frac{m_1m_2gR(R+r)}{m_1R^2 + m_2r^2}.$$

98. Шестерня *2* действует на шестерню *1* с силой N, направленной вниз. (Эта сила приложена в точке соприкосновения шестерен.) Так как шестерня *1* невесома, то

$$M - NR_1 = 0,$$

откуда $N = \frac{M}{R_1}$. Шестерня *1* действует на шестерню *2* также с силой N, но направленной вверх. Так как шестерня *2* и шкив *3* невесомы, то

$$NR_2 - Tr = 0,$$

где T — натяжение нити. Следовательно,

$$T = \frac{NR_2}{r} = \frac{MR_2}{R_1 r},$$

откуда

$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{MR_2 - mgR_1 r}{mR_1 r}.$$

99. Проецируя на ось y силы, действующие на штифт, получаем:

$$N \cos\alpha - mg = ma',$$

где a'— ускорение штифта (рис. 277).

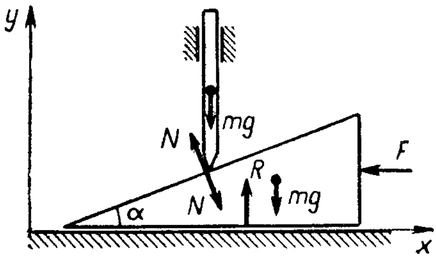


Рис. 277

Проецируя на ось x силы, действующие на клин, будем иметь:

$$F - N \sin\alpha = ma,$$

где a — ускорение клина. Когда клин перемещается на расстояние s, штифт проходит путь $s \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$a' = a \operatorname{tg}\alpha.$$

Получилась система трех уравнений с тремя неизвестными. Решив ее, найдем:

$$a = \frac{(F\cos\alpha - mg\sin\alpha)\cos\alpha}{m},$$

$$N = F\sin\alpha + mg\cos\alpha.$$

2. Криволинейное движение точки

100. Пусть эта сила равна F. Тогда

$$mg - F = m\frac{v^2}{R}.$$

Подставив сюда $v = 1$ *км/сек*, $R = 6370$ *км* (радиус Земли), $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, найдем: $F = 0{,}984\ mg$.

101. В этом случае $mg = m\omega^2 R$, где ω — угловая скорость Земли, а R — ее радиус. Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{6370 \cdot 10^3}} = 0{,}00124\ (сек^{-1}),$$

откуда искомая продолжительность суток

$$T = \frac{2\pi}{0{,}00124} \approx 5070\ сек \approx 84\ мин.$$

102. В высшей точке траектории на шар действуют две силы: сила тяжести mg и искомая сила сопротивления F, которая горизонтальна. Складывая силы mg и F по правилу параллелограмма, получим:

$$\sqrt{(mg)^2 + F^2} = ma,$$

откуда

$$F = m\sqrt{a^2 - g^2} = 1 \cdot \sqrt{12{,}5^2 - 9{,}8^2} \approx 7{,}5\ (н).$$

103. Уравнения движения грузов имеют вид:

$$T_1 = m_1 \omega^2 R_1,\ T_2 - T_1 = m_2 \omega^2 R_2.$$

Следовательно,

$$T_1 = m_1 \omega^2 R_1,\ T_2 = m_1 \omega^2 R_1 + m_2 \omega^2 R_2.$$

104. Пусть искомая длина равна x. Тогда

$$m\omega^2 (OA + x) = F,$$

где F — упругая сила пружины. Но

$$F = c\,(x - l).$$

Следовательно,

$$m\,\omega^2 (OA + x) = c\,(x - l).$$

Подставив сюда числовые значения для m, ω, c, l, OA и решив это уравнение, получим $x = 0{,}4\ м = 40\ см$.

105. На маятник действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити T (рис. 278). Ускорение маятника состоит из нормального, направленного от точки A к точке O, и из касательного, перпендикулярного к AO. Проецируя эти силы и ускорения на направление OA, получаем:

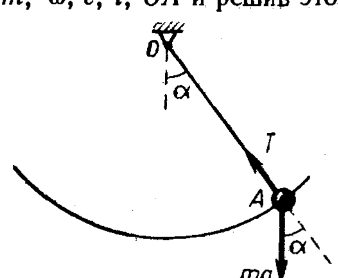


Рис. 278

$$mg\cos\alpha - T = -ma_n,$$

или

$$mg\cos\alpha - T = -m\frac{v^2}{l}.$$

Следовательно, $T = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{l}$.

106. На маятник действуют силы mg и T, показанные на рис. 278. Ускорение маятника складывается из переносного, направленного вправо (мы считаем, что вагон движется вправо), и из относительного, которое состоит из нормального ускорения и касательного. Проецируя все силы и ускорения на прямую OA, получим:

$$mg\cos\alpha - T = m(a\sin\alpha - a_n),$$

или

$$mg\cos\alpha - T = m\left(a\sin\alpha - \frac{v^2}{l}\right),$$

откуда $T = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{l} - ma\sin\alpha$.

107. На камень действуют: сила тяжести mg, направленная вниз, реакция полусферы N, направленная по продолжению радиуса OA, и сила трения kN, перпендикулярная OA. Ускорение камня складывается из касательного и нормального, первое из которых перпендикулярно OA, а второе направлено от точки A к точке O и равно $\frac{v^2}{R}$. Спроецировав все силы и ускорения на направление AO, получим:

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$

откуда $N = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{R}$. (Следовательно, давление камня на полусферу не зависит от коэффициента трения.)

108. Силы N и mg, показанные на рис. 279, вызывают центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{l\sin\alpha}$. Проецируя эти силы на оси x и y, получаем:

$$-N\sin\alpha = -\frac{mv^2}{l\sin\alpha},$$

$$N\cos\alpha - mg = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

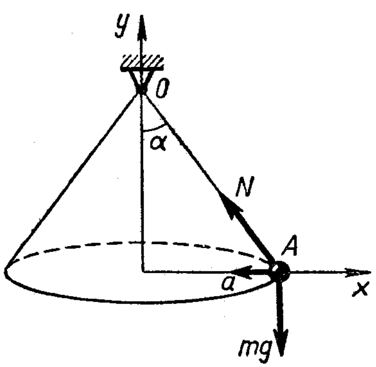


Рис. 279

$$v=\sqrt{gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad N=\frac{mg}{\cos\alpha}.$$

109. Из решения задачи 108 получаем:

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi l\sin\alpha}{\sqrt{gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$0\leqslant T\leqslant 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Так как в данном случае

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1\,м}{9{,}8\,\frac{м}{сек^2}}}\approx 2\ сек,$$

то период $T=1$ *сек* возможен, а период $T=3$ *сек* — нет.

110. Из решения задачи 109 следует, что

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

111. Если пренебречь силой тяжести шарика, то на него будут действовать лишь силы натяжения T (рис. 280). Равнодействующая этих сил равна $2T\cos\alpha$, а центростремительное ускорение шарика равно $m\omega^2 l\cos\alpha$ (см. рис. 42). Значит, $2T\cos\alpha=m\omega^2 l\cos\alpha$, откуда

$$T=\frac{m\omega^2 l}{2}.$$

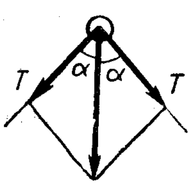


Рис. 280

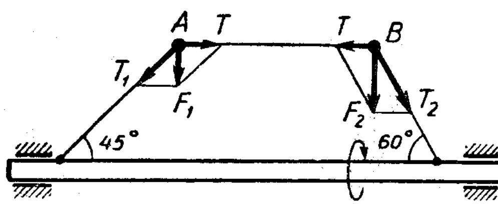


Рис. 281

112. На левый шарик действуют силы натяжения T_1 и T, равнодействующая которых является центростремительной силой F_1, а на правый — силы натяжения T_2 и T, равнодействующая которых представляет центростремительную силу F_2 (рис. 281). Из левого параллелограмма сил следует, что $T=F_1\,\mathrm{ctg}\,45°$, а из правого — что $T=F_2\,\mathrm{ctg}\,60°$. Следовательно,

$$F_1\,\mathrm{ctg}\,45°=F_2\,\mathrm{ctg}\,60°$$

и так как $F_1 = m\omega^2 R$ и $F_2 = M\omega^2 R$, то

$$m\omega^2 R \operatorname{ctg} 45^\circ = M\omega^2 R \operatorname{ctg} 60^\circ;$$

где M — масса шарика B. Отсюда получаем: $M = m\sqrt{3}$.

113. В момент, когда шарик проходит через нижнее положение, натяжение нити равно $mg + \frac{mv^2}{l}$. Дальше задача сводится к разложению этой силы на две параллельные, приложенные в точках A и B. Осуществив это разложение, найдем:

$$N_A = \left(mg + \frac{mv^2}{l}\right)\frac{b}{a+b}, \quad N_B = \left(mg + \frac{mv^2}{l}\right)\frac{a}{a+b}.$$

114. В верхней точке обруча на брусок действуют: сила тяжести mg, направленная вниз, реакция N обруча, направленная также вниз, и, возможно, сила трения, направленная вправо. Проецируя эти силы на вертикаль, получаем:

$$mg + N = \frac{mv^2}{R}$$

(положительным считаем направление вниз). Отсюда находим:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = -1{,}8\,m\,(н).$$

Но реакция N не может быть отрицательной (так как она не может быть направлена вверх). Следовательно, скорость бруска в верхней точке не может равняться 2 *м/сек.*

115. На шарик действуют сила тяжести mg и реакция чашки N (рис. 282). Ускорение шарика равно

$$a = m\omega^2 \cdot OM \sin\alpha = m\omega^2 R \sin\alpha.$$

Проецируя силы и ускорение на ось x, получаем:

$$mg \sin\alpha = ma\cos\alpha = m\omega^2 R \sin\alpha \cos\alpha.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}, \quad \alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}.$$

Этим углом и определяется положение шарика в чаше.

116. На шарик действуют: сила тяжести mg, сила натяжения нити T и реакция конуса N (рис. 283). Ускорение шарика a равно $\omega^2 r$. Проецируя силы и ускорение на оси x и будем иметь:

$$T - mg\cos\alpha = -m\omega^2 r\sin\alpha, \quad N - mg\sin\alpha = m\omega^2 r\cos\alpha.$$

Решив эту систему, получим:

$$T = mg\cos\alpha - m\omega^2 r\sin\alpha, \quad N = mg\sin\alpha + m\omega^2 r\cos\alpha.$$

117. На шарик действуют: сила тяжести mg, направленная вниз, реакция платформы N, направленная вверх, и сила натяже-

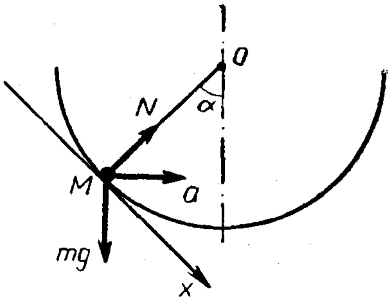


Рис. 282

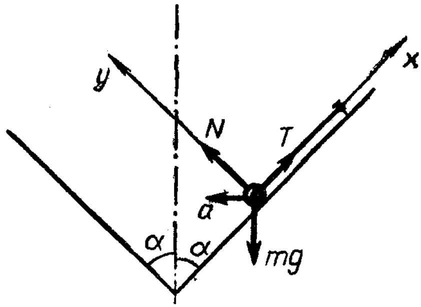


Рис. 283

ния нити T, направленная вдоль нити влево. Ускорение шарика равно $m\omega^2 l \cos\alpha$ и направлено к оси вращения. Проецируя силы и ускорение на горизонталь и вертикаль, получим:

$$T\cos\alpha = m\omega^2 l\cos\alpha, \qquad \text{а}$$

$$N + T\sin\alpha - mg = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$T = m\omega^2 l,\ N = mg - m\omega^2 l\sin\alpha.$$

118. Так как ускорение шарика направлено от точки C к точке O (рис. 49), то так же направлена равнодействующая всех сил, приложенных к шарику. Но сила тяжести шарика и сила, действующая на шарик со стороны платформы (реакция платформы), взаимно уравновешиваются. Следовательно, сила, действующая на шарик со стороны стержня, направлена от C к O и равна

$$F = m\omega^2 OC.$$

Значит, сила, приложенная к стержню в точке C, имеет такую же величину, но направлена от O к C (рис. 284). Так как масса стержня равна нулю, то действующие на него моменты сил уравновешиваются. Поэтому

$$T\cdot AB = Fd,$$

где d — плечо силы F относительно точки A ($d = 0{,}48$ *м*). Подставив в последнее равенство $AB = 0{,}4$ *м*, $d = 0{,}48$ *м*, $F = m\omega^2\, OC$ ($OC = 0{,}5$ *м*), получим: $T = 0{,}6\ m\omega^2$ (*н*).

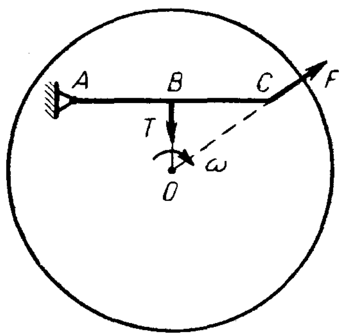


Рис. 284

119. Первый учащийся неправ. То, что шарик не движется в направлении OA, означает, что он не имеет в этом направлении *скорости*. Но важно не какова скорость, а каково *ускорение*. Последнее же направлено влево и, следовательно, имеет составляющую в направлении OA. Поэтому сумма всех сил, действующих в этом направлении, отлична от нуля.

§ 6. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

120. Внешними силами, действующими на эту систему, являются силы тяжести и реакция земли. Так как они вертикальны, то количество движения системы не будет изменяться, т. е. будет оставаться равным нулю (ибо оно было таким вначале). Значит,

$$M u + m (u + v_{\text{отн}}) = 0,$$

где u — искомая скорость тележки. Отсюда

$$u = -\frac{m}{M+m} v_{\text{отн}}.$$

Знак минус показывает, что тележка будет двигаться назад.

121. Внешними силами, действующими на систему пушка—снаряд, являются силы тяжести и реакция земли. Так как эти силы вертикальны, то $mv_x + Mu_x = 0$ (u — скорость пушки после выстрела). Но $v_x = v \cos\alpha$ и $u_x = u$. Следовательно,

$$mv \cos\alpha + M u = 0,$$

откуда $u = -\frac{mv\cos\alpha}{M}$. (Знак минус показывает, что пушка откатывается в сторону, противоположную выстрелу.)

122. Так как на систему, состоящую из частиц *1* и *2*, не действуют внешние силы, то количество движения этой системы сохраняется как в направлении оси x, так и в направлении оси y. Поэтому

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)\, u_x, \quad m_2v_2 = (m_1 + m_2)\, u_y,$$

где u_x и u_y — составляющие искомой скорости. Следовательно,

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$

123. Количество движения шаров до удара и после удара одинаково:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Тогда

$$u_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_1u_1}{m_2}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$u_2 = 6 \text{ м/сек}.$$

124. После удара вторая частица будет иметь такое же количество движения, какое было у частиц *1* и *2* до удара. Обозначив искомую скорость через u, получим:

$$mu = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2},$$

$$u = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

125. Так как все внешние силы вертикальны, то

$$Mv = (M + m) u,$$

откуда

$$u = \frac{Mv}{M+m}.$$

126. Так как все внешние силы вертикальны и скорость первого осколка после разрыва тоже вертикальна, то

$$mv_0 \cos\alpha = \frac{m}{2} u \cos\beta,$$

откуда

$$u = \frac{2v_0 \cos\alpha}{\cos\beta}.$$

127. Так как все внешние силы вертикальны, то

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

(так как в начальный момент призмы покоились). Далее, учитывая, что нижняя призма будет двигаться влево, получим:

$$v_{2x} = -u, \quad v_{1x} = v_{\text{отн}} \cos\alpha - u,$$

где u — искомая скорость. Подставив эти выражения в предыдущее равенство и положив $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, найдем:

$$u = \frac{v_{\text{отн}} \cos\alpha}{4}.$$

128. Пусть v_x обозначает горизонтальную составляющую абсолютной скорости шарика в момент, когда нить проходит через вертикальное положение. Тогда будем иметь:

$$mv_x - Mu = 0,$$

где u — искомая скорость (направленная влево). Но

$$v_x = \omega l - u$$

и поэтому

$$m(\omega l - u) - Mu = 0.$$

Следовательно,

$$u = \frac{m\omega l}{M+m}.$$

129. В этом случае

$$m(\omega l \cos\alpha - u) - Mu = 0.$$

$$u = \frac{m\omega l \cos\alpha}{M+m}.$$

130. Из равенства $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$ (см. решение задачи 127) получаем:

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = -\frac{m_2}{m_1} = -\frac{3m}{m} = -3.$$

Пусть в дальнейшем v_{1x} и v_{2x} обозначают *абсолютные* значения скоростей призм в горизонтальном направлении (т. е. без учета знака). Тогда

$$v_{1x} = 3v_{2x},$$

и так как это соотношение имеет место в любой момент времени, то

$$s_{1x} = 3s_{2x},$$

где s_{1x} и s_{2x} — горизонтальные перемещения призм (по абсолютной величине). Но

$$s_{1x} = (a - b) - s_{2x}.$$

Следовательно,

$$a - b - s_{2x} = 3s_{2x},$$

откуда $s_{2x} = \dfrac{a-b}{4}.$

131. Так как силы трения между призмами являются внутренними, то ответ не изменится. (Но изменится время соскальзывания верхней призмы.)

132. Так же, как в задаче 130, получим:

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{M}{m}, \quad \frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

где v_{1x} и s_{1x} — абсолютные значения горизонтальной скорости и горизонтального перемещения шарика, а v_{2x} и s_{2x} — чашки. Но так как

$$s_{1x} = 2(R - r) - s_{2x}$$

(чашка смещается вправо), то

$$\frac{2(R-r) - s_{2x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

откуда

$$s_{2x} = 2(R - r)\frac{m}{M+m}.$$

133. Песочные часы представляют систему, количество движения которой не меняется в процессе работы (за исключением начального и конечного моментов времени). Поэтому все действующие на часы внешние силы уравновешены. Отсюда следует, что $P - N = 0$, т. е. $N = P$ (N — реакция стола; она равна силе давления часов на стол).

§ 7. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

134. $A = -kmgs = -0{,}2 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = -4{,}9$ (*дж*).

135. Силой, движущей человека, является реакция лестницы. Работы она не совершает. (Потенциальная энергия человека увеличивается за счет работы внутренних сил, действующих в его мышцах).

136. Может. Например, если отсчитывать высоту от уровня земли, то потенциальная энергия тела, находящегося в подвале, будет отрицательной.

137. Время движения в стволе равно

$$t = \frac{s}{v/2} = \frac{2\,м}{300\,\frac{м}{сек}} = \frac{1}{150}\,сек.$$

Работа, совершенная пороховыми газами, равна

$$A = \frac{mv^2}{2} = \frac{6 \cdot 600^2}{2} = 108 \cdot 10^4 \quad (дж).$$

Средняя мощность орудия равна

$$N = \frac{A}{t} \approx 16 \cdot 10^7\,вт = 160000\,квт.$$

138. Из равенства $h = \frac{v}{2}t$ находим конечную скорость груза: $v = \frac{2h}{t}$. Следовательно, искомая работа равна

$$A = W_p + T = mgh + \frac{m\left(\frac{2h}{t}\right)^2}{2} = mgh + \frac{2mh^2}{t^2}.$$

139. Из условия следует, что на искомой высоте потенциальная энергия тела будет составлять половину его полной энергии. А так как полная энергия этого тела равна $\frac{mv_0^2}{2}$, то

$$mgh = 0{,}5\,\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$h = \frac{v_0^2}{4g}.$$

140. Потенциальная энергия, потерянная шариком к моменту удара, равна $\frac{mgl}{2}$, где l — длина нити. Значит, подходя к стенке, он имел кинетическую энергию $\frac{mgl}{2}$, а после удара — кинетическую энергию $\frac{mgl}{4}$. В то же время потенциальная энергия, приобретенная шариком при последующем отклонении, равна $mgl\,(1 - \cos\beta)$, где β — искомый угол. Поэтому

$$\frac{mgl}{4} = mgl\,(1 - \cos\beta),$$

откуда $\beta \approx 41°$.

141. Пусть v — скорость шара до удара, а u — после удара. Тогда

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{2}{3}\,\frac{mv^2}{2},$$

откуда $u = \sqrt{\frac{2}{3}}\,v$. С другой стороны, так как все силы, действующие на шар, вертикальны, то горизонтальная составляющая его количества движения, а следовательно, и горизонтальная составляющая его скорости не меняются. Поэтому

$$v\sin\alpha = u\sin\beta,$$

$$\sin\beta = \frac{v\sin\alpha}{u} = \frac{v\sin\alpha}{v\sqrt{^2/_3}} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Подставив сюда $\alpha = 45°$, получим $\beta = 60°$.

142. Потенциальная энергия, потерянная грузом, равна энергии, приобретенной растянутой пружиной. Поэтому

$$mgh = \frac{ch^2}{2}, \quad h = \frac{2mg}{c}.$$

Подставив сюда $mg = 30$ *н*, $c = 10$ *н/см* $= 1000$ *н/м*, получим $h = 0{,}06$ *м* $= 6$ *см*.

(После того как груз опустится на эту высоту, он станет двигаться вверх, затем — снова вниз и т. д. — возникнут колебания).

143. Из закона сохранения количества движения и закона сохранения энергии получаем:

$$m_1v_1 = m_2v_2, \quad \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = W_p,$$

где W_p — энергия сжатой пружины. Подставив числовые значения и решив затем эту систему уравнений, найдем: $v_1 = 2$ *м/сек*, $v_2 = 1$ *м/сек*.

144. Из закона сохранения количества движения находим скорость шаров после удара:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 4 \text{ м/сек.}$$

Кинетическая энергия шаров до удара

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 216 \text{ дж},$$

а их кинетическая энергия после удара

$$T = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = 24 \text{ дж.}$$

Следовательно,

$$T_0 - T = 216 - 24 = 192 \text{ (дж)}.$$

145. Из закона сохранения количества движения получаем:

$$mv = \frac{mv}{2} + Mu, \quad u = \frac{mv}{2M},$$

где u — скорость ящика после вылета пули. Далее будем иметь:

$$T_0 = \frac{mv^2}{2}, \quad T = \frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} + \frac{M\left(\frac{mv}{2M}\right)^2}{2},$$

$$T_0 - T = \frac{mv^2}{8}\left(3 - \frac{m}{M}\right).$$

146. Скорость ящика с застрявшей пулей $u = \frac{mv}{M + m}$, а его кинетическая энергия

$$T = \frac{(M + m) u^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)}.$$

Поскольку потенциальная энергия сжатой пружины будет иметь такую же величину, то

$$\frac{cs^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2(M + m)},$$

откуда

$$s = \frac{mv}{\sqrt{(M + m) c}}.$$

147. Единственными внешними силами, действующими на систему шарик—призма, являются силы тяжести и реакция плоскости. Так как эти силы вертикальны, то

$$mv = mu_{1x} + Mu_{2x} = m \cdot 0 + Mu_2 = Mu_2,$$

где u_1 и u_2 — скорости шарика и призмы после удара. С другой стороны,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

Получилась система двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее, найдем:

$$u_1 = v\sqrt{\frac{M-m}{M}}, \qquad u_2 = v\frac{m}{M}.$$

148. Так как все внешние силы вертикальны, то

$$mu - Mv = 0, \qquad u = \frac{Mv}{m},$$

где u и v — скорости маятника и тележки в момент, когда маятник проходит через вертикальное положение. (Здесь учтено, что тележка будет в этот момент двигаться влево.) Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = mgl\,(1 - \cos\alpha).$$

Подставив сюда $u = \dfrac{Mv}{m}$ и решив полученное уравнение, найдем:

$$v = \frac{2m\sqrt{gl}}{\sqrt{M\,(M+m)}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

149. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{m\,(\omega l)^2}{2} + \frac{m\,(2\omega l)^2}{2} = mgl\,(1 - \cos\alpha) + mg\cdot 2l\,(1 - \cos\alpha),$$

откуда $\omega = \sqrt{\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{g}{l}\,(1 - \cos\alpha)}$.

150. В начальный момент кинетическая энергия системы равна нулю. В момент, когда груз M опустится до наинизшего положения, кинетическая энергия системы опять будет равна нулю (ибо в этот момент будет равна нулю скорость каждого груза). Следовательно, потенциальная энергия системы будет в начальном и конечном положениях одинаковой. Поэтому

$$MgH = 2mgh,$$

где H — расстояние, на которое опустится средний груз, а h — расстояние, которое пройдет при этом каждый из крайних грузов. Но

$$h = \sqrt{l^2 + H^2} - l.$$

Следовательно,

$$MgH = 2mg\left(\sqrt{l^2 + H^2} - l\right),$$

откуда

$$H = \frac{4Mml}{4m^2 - M^2}.$$

151. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2} = m_1gs - m_2gs,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gs}{m_1 + m_2}}.$$

152. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = m_1gs - m_2gs\frac{r}{R}.$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R}{r}.$$

Из этих уравнений найдем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2R(m_1R - m_2r)gs}{m_1R^2 + m_2r^2}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2r^2(m_1R - m_2r)gs}{R(m_1R^2 + m_2r^2)}}.$$

153. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = m_1gs - m_2g\frac{s}{2},$$

откуда

$$v = 2\sqrt{\frac{(2m_1 - m_2)gs}{4m_1 + m_2}}.$$

154. Когда груз m пройдет расстояние s, шкив *3* повернется на угол $\frac{s}{r}$, а шестерня *1* — на угол $\frac{s}{r} \cdot \frac{R_2}{R_1}$. Поэтому из закона сохранения энергии получим:

$$M\frac{s}{r} \cdot \frac{R_2}{R_1} = mgs + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{2s\left(\frac{MR_2}{mrR_1} - g\right)}.$$

155. К этому моменту работа, совершенная силой F, станет вдвое больше. Следовательно, вдвое большей станет и кинетическая энергия вала. Но она, очевидно, пропорциональна квадрату его угловой скорости (так как скорость каждой частицы этого вала пропорциональна его угловой скорости). Поэтому искомая скорость вращения равна

$$n = 50\sqrt{2} \approx 71 \ (об/мин).$$

156. Так как обруч однороден и симметричен, то

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия обруча, обусловленная его поступательным движением, а T_2 — вращательным. (Движение обруча складывается из поступательного и вращательного.) Первая из этих энергий равна $\frac{mv^2}{2}$, а вторая — $\frac{mu^2}{2}$, где u — линейная скорость частиц обруча в его вращательном движении вокруг центра O. Но так как обруч катится без скольжения, то $u = v$ и поэтому

$$T_1 = \frac{mv^2}{2}, \quad T_2 = \frac{mv^2}{2},$$

$$T = mv^2.$$

157. Так как все точки шкива имеют одинаковую скорость v, равную скорости груза, то на основании закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgs.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2mgs}{M + m}}.$$

158. Начальная кинетическая энергия обруча равна mv_0^2 (см. решение задачи 156), а конечная кинетическая энергия равна нулю. Так как потенциальная энергия, приобретенная обручем, равна $mgl \sin \alpha$, то

$$mv_0^2 = mg\, l \sin \alpha;$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{gl \sin \alpha}.$$

159. Так как кинетическая энергия катка равна mv^2 (см. решение задачи 156), то

$$mv^2 = Fs \cos \alpha,$$

где α — угол, образуемый рукояткой OA с горизонтом. Но $\cos \alpha$, как легко сосчитать, равен 0,8. Следовательно,

$$F = \frac{mv^2}{s \cos \alpha} = \frac{300 \cdot 0,8^2}{2 \cdot 0,8} = 120 \ (н).$$

Радиус инерции и момент инерции

160. Так как все частицы кольца находятся на одинаковом расстоянии от его центра, то радиус инерции этого кольца равен просто его радиусу.

161. Так как $A = M\varphi$, то

$$M\varphi = \frac{m\left(\frac{\omega R}{\sqrt{2}}\right)^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{M\varphi}{m}}.$$

162. Когда вторая шестерня повернется на угол φ, первая повернется на угол $\varphi\frac{R_2}{R_1}$. Поэтому

$$M\varphi\frac{R_2}{R_1} = \frac{m\omega^2\rho^2}{2},$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2M}{m}\varphi\frac{R_2}{R_1}}.$$

163. Так как

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{M\left(\frac{\omega R}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = mgs$$

и $\omega R = v$, то

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{4} = mgs,$$

откуда

$$v = 2\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}.$$

164. Так как центр тяжести стержня опускается на $l/2$, то

$$\frac{m\left(\frac{\omega l}{\sqrt{3}}\right)^2}{2} = mg\frac{l}{2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

165. $T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{5} = \frac{mv^2}{5}$, где v — линейная скорость точек земного экватора. Подставив сюда $m = 6\cdot 10^{24}$ *кг*, $v = \frac{4\cdot 10^7}{3600\cdot 24}$ *м/сек*, получим:

$$T \approx 26\cdot 10^{28}\ \textit{дж} \approx 7\cdot 10^{22}\ \textit{квт}\cdot\textit{ч}.$$

Эта величина более чем в десять миллиардов раз превосходит годичную добычу электроэнергии во всем мире.

Вычисление ускорений

166. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}=m_1gs-m_2gs, \quad v^2=2\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}s.$$

(Начальную скорость грузов считаем равной нулю.) Но так как грузы движутся с постоянным ускорением, то

$$v^2=2as,$$

и, сравнивая два последних равенства, получаем:

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g.$$

167. Считая, что движение начинается из состояния покоя, и воспользовавшись законом сохранения энергии, получим:

$$v_1^2=\frac{2R(m_1R-m_2r)gs_1}{m_1R^2+m_2r^2}$$

(см. решение задачи 152). Но так как

$$v_1^2=2a_1s_1,$$

то

$$a_1=\frac{R(m_1R-m_2r)}{m_1R^2+m_2r^2}g.$$

Поскольку $a_2=a_1\frac{r}{R}$, то

$$a_2=\frac{r(m_1R-m_2r)}{m_1R^2+m_2r^2}g.$$

168. Кинетическая энергия обруча равна mv^2 (см. задачу 156). Считая, что обруч начинает движение без начальной скорости, получим:

$$mv^2=mgs\sin\alpha, \quad v^2=gs\sin\alpha.$$

Но

$$v^2=2as,$$

следовательно,

$$a=\frac{g\sin\alpha}{2}.$$

169. Считая, что движение начинается из состояния покоя, получим:

$$\frac{mv^2}{2}=M\varphi,$$

где φ — угол поворота вала. Но так как $\varphi = \frac{s}{R}$, где s — путь, пройденный грузом, то

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Ms}{R},$$

откуда

$$v^2 = 2\frac{M}{mR}s.$$

Следовательно,

$$a = \frac{M}{mR}.$$

170. В этом случае будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega\rho)^2}{2} = M\frac{s}{R}, \quad \omega = \frac{v}{R},$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v\rho}{R}\right)^2}{2} = M\frac{s}{R},$$

$$v^2 = 2\frac{MR}{m(R^2+\rho^2)}s,$$

$$a = \frac{MR}{m(R^2+\rho^2)}.$$

§ 8. СТАТИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1. Силы, приложенные в одной точке

171. По формулам (31) на стр. 36 находим:

$$R_x = 50 + 100\cos 30^\circ + 0 - 200\cos 60^\circ = 36{,}6 \ (н),$$

$$R_y = 0 + 100\cos 60^\circ + 60 - 200\cos 30^\circ = -63{,}2 \ (н),$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \approx 73 \ н.$$

Равнодействующая R расположена так, как показано на рис. 285. Ее направление (угол α) легко найти по известным составляющим R_x и R_y.

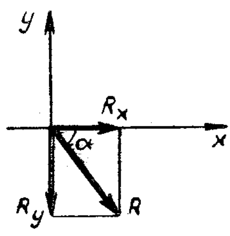


Рис. 285

172. Так как

$$R_x = 0 + 50\sqrt{3}\cos 60^\circ - 50\cos 30^\circ = 0,$$

$$R_y = -100 + 50\sqrt{3}\cos 30^\circ + 50\cos 60^\circ = 0,$$

то $\vec{R} = 0$, т. е. силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ уравновешиваются.

173. Так как точка B (узел B) находится в покое, то приложенные к ней силы уравновешиваются. Но на эту точку действуют: сила P, направленная вниз, сила T_1, направленная влево, и сила T_2, направленная от точки B к точке C (T_1 — натяжение нити AB, T_2 — натяжение нити BC). Поэтому, направив ось x вправо, а ось y — вверх, получим следующие уравнения равновесия:

$$-T_1 + T_2 \cos\alpha = 0,$$
$$-P + T_2 \cos(90^\circ - \alpha) = 0.$$

Решив эту систему, найдем:

$$T_1 = P \operatorname{ctg}\alpha, \; T_2 = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

174. В силу симметрии конструкции приходим к выводу, что к точке C (так же как к точке B) приложена сила $\frac{P}{2}$, направленная вертикально вниз. Рассматривая затем равновесие точки C, придем к таким же уравнениям, как в предыдущей задаче (только вместо силы P теперь будет фигурировать сила $\frac{P}{2}$). В итоге получим:

$$T_1 = \frac{P \operatorname{ctg}\alpha}{2}, \quad T_2 = T_3 = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

(T_1 — натяжение нити BC, T_2 — натяжение нити CD, T_3 — натяжение нити AB.)

175. Пусть натяжение нити AB равно T_1, натяжение нити BC равно T_2 и натяжение нити CD равно T_3. Тогда на точку B будут действовать: сила T_1, направленная от B к A, сила T_2, направленная от B к C, и сила P, направленная вниз. Составив для этих сил уравнения равновесия, получим:

$$\left.\begin{aligned} -T_1 \cos\alpha + T_2 &= 0, \\ T_1 \cos(90^\circ - \alpha) - P &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, найдем:

$$T_2 = P \operatorname{ctg}\alpha.$$

На точку C будут действовать: сила T_2, направленная от C к B, сила T_3, направленная от C к D, и сила Q, направленная вниз. Составив для этих сил уравнения равновесия, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} -T_2 + T_3 \cos\beta &= 0, \\ T_3 \cos(90^\circ - \beta) - Q &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставив сюда найденное значение $T_2 = P \operatorname{ctg}\alpha$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Из нее найдем:

$$Q = P\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2. Параллельные силы

176. Так как все силы направлены в одну сторону, то их равнодействующая имеет величину

$$R = 10 + 20 + 30 + 40 = 100\ (н)$$

и направлена вниз. Вычисляя моменты этих сил относительно оси, проходящей через точку A_1, получим:

$$Rd = F_2 a + F_3\, 2a + F_4\, 3a.$$

(Моменты по часовой стрелке считаем положительными. Так как равнодействующая R приложена, несомненно, где-то между точками A_1 и A_4, то момент Rd берем со знаком плюс.) Подставив в это уравнение числовые данные, получим:

$$d = \frac{F_2 a + F_3 2a + F_4 3a}{R} = 2a.$$

Таким образом, равнодействующая данных сил имеет величину 100 *н*, а ее линия действия совпадает с линией действия силы $\vec{F}_3$.

177. Равнодействующая этих сил направлена вверх и имеет величину $R = 20$ *н*. Вычисляя моменты, условимся считать их положительными, если они направлены по часовой стрелке. Тогда, составляя уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A_1, и предполагая, что равнодействующая R проходит правее этой точки, получим:

$$-Rd = F_2 a - F_3 2a$$

(так как сила R направлена вверх и мы считаем, что она расположена справа от точки A_1, то ее момент отрицателен). Подставив в написанное равенство числовые значения, будем иметь:

$$-20d = 20a - 50 \cdot 2a,\ \ d = 4a.$$

Так как плечо d получилось положительным, то равнодействующая R расположена так, как мы предполагали, т. е. справа.

178. Равнодействующая направлена вниз и имеет величину $R = 5$ *н*. Далее, составляя уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A_1, и считая, что равнодействующая проходит правее этой точки, получим:

$$Rd = F_2 a - F_3 2a.$$

(Так как сила R направлена вниз и мы считаем, что она проходит справа от точки A_1, то ее момент положителен.) Подставив числовые значения, найдем:

$$5d = 20a - 25 \cdot 2a,\ \ d = -6a.$$

Поскольку плечо d получилось отрицательным, то равнодействующая R расположена не справа от точки A_1, а слева.

179. В этом случае алгебраическая сумма сил получается равной

$$F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 20 - 30 = 0.$$

Следовательно, силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ эквивалентны некоторой паре сил. Момент этой пары равен сумме моментов данных сил относительно произвольной точки, например относительно точки A_1. Произведя вычисления, получим:

$$M = F_2 \cdot a - F_3 \cdot 2a = 20a - 30 \cdot 2a = -40a.$$

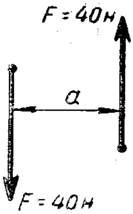


Рис. 286

Следовательно, рассматриваемые силы эквивалентны любой паре, момент которой равен $40a$ и направлен против часовой стрелки, например паре, изображенной на рис. 286. Эту пару можно считать расположенной где угодно в плоскости сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ибо пары, имеющие одинаковые моменты (по величине и знаку), эквивалентны.

180. Алгебраическая сумма сил равна

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 5 - 30 + 45 - 20 = 0.$$

Алгебраическая сумма их моментов относительно оси, проходящей через точку A_1, равна

$$F_2 a - F_3 \cdot 2a + F_4 \cdot 3a = 30a - 45 \cdot 2a + 20 \cdot 3a = 0.$$

Следовательно, рассматриваемые силы находятся в равновесии (имеют равнодействующую, равную нулю).

181. Силу, приложенную в точке A_1, обозначим через F_1, а силу, приложенную в точке A_2, — через F_2. Так как эти силы, очевидно, направлены вниз, то

$$F_1 + F_2 = 30 \ \text{н}.$$

Кроме того, так как момент силы $\vec{R}$ должен быть равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, то, беря моменты относительно оси, проходящей через точку A_1, получим:

$$30 \cdot a = F_2 \cdot 3a + F_1 \cdot 0.$$

Из этих двух равенств найдем: $F_1 = 20$ *н*, $F_2 = 10$ *н*.

182. Силу, приложенную в точке A_1, обозначим через F_1, а силу, приложенную в точке A_2, — через F_2. Будем считать, что эти силы направлены вниз. (Это, конечно, неверно, но мы будем действовать формально.) Тогда

$$F_1 + F_2 = 50 \ \text{н}.$$

Кроме того, вычисляя моменты относительно оси, проходящей через точку A_1, получим:

$$-50a = F_1 \cdot 0 + F_2 a.$$

(Так как силу F_2 мы считаем направленной вниз, то ее момент относительно точки A_1 положителен; момент же силы R, очевидно, отрицателен.) Из написанных равенств найдем:

$$F_1 = 100\ н,\ F_2 = -50\ н.$$

Поскольку сила F_1 получилась положительной, то она направлена так, как мы предполагали, т. е. вниз. Сила же F_2 получилась отрицательной и, следовательно, направлена не вниз, а вверх.

183. Равновесие этого тела будет устойчивым, если его центр тяжести окажется ниже точки O. Найдем сначала то значение h, при котором центр тяжести тела совпадает с точкой O. Это будет в том случае, когда

$$V_1 \cdot OC_1 = V_2 \cdot OC_2,$$

где V_1 — объем полушара, V_2 — объем цилиндра, C_1 — центр тяжести полушара и C_2 — центр тяжести цилиндра. Подставив в это равенство

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad V_2 = \pi R^2 h,$$

$$OC_1 = \frac{3}{8}R, \quad OC_2 = \frac{1}{2}h,$$

получим $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Следовательно, равновесие будет устойчивым при $h < \frac{R}{\sqrt{2}}$.

184. На расстоянии $\frac{384\,000}{82} = 4683\ км$ от центра Земли. Так как радиус Земли равен 6370 *км*, то рассматриваемая точка находится внутри Земли.

3. Уравнения равновесия

185. На стержень действуют: натяжение T_1 левой нити, натяжение T_2 правой нити и сила $P = 120\ н$. Так как первые две силы направлены вверх, а третья — вниз, то, составив уравнение проекций на ось y, получим:

$$T_1 + T_2 - 120\ н = 0.$$

Далее, записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C, будем иметь:

$$T_1 \cdot 0{,}25\ м - T_2 \cdot 0{,}75\ м = 0.$$

(Момент силы P относительно точки C равен нулю.) Из этих двух уравнений с двумя неизвестными найдем:

$$T_1 = 90\ н,\ T_2 = 30\ н.$$

186. На балку действуют: сила $P = 500$ *н*, приложенная в точке C, сила $Q = 600$ *н*, приложенная на расстоянии 0,75 *м* от точки A, реакция N_A, направленная вверх, и реакция N_B, направленная вниз. Составив уравнение проекций на ось y, получим:

$$-500\ н - 600\ н + N_A - N_B = 0.$$

Составив затем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A, будем иметь:

$$-500\ н \cdot 2\ м - 600\ н \cdot 0{,}75\ м + N_B \cdot 0{,}5\ м = 0.$$

Из этих уравнений найдем: $N_A = 4000$ *н*, $N_B = 2900$ *н*.

187. Пусть стержень AB имеет длину l и вес P, а стержень BC — длину $2l$ и вес $2P$. На тело ABC действуют: сила тяжести P, приложенная в середине отрезка AB, сила $2P$, приложенная в середине отрезка BC, и натяжение нити, приложенное в точке A. Составив уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A, получим:

$$Pa - 2Pb = 0,$$

где a и b — плечи сил P и $2P$ относительно точки A. Нетрудно сосчитать, что

$$a = \frac{l \sin\alpha}{2}, \quad b = l\cos\alpha - l\sin\alpha$$

(середина отрезка AB находится правее точки A, а середина отрезка BC — левее). Следовательно,

$$\frac{Pl\sin\alpha}{2} - 2P(l\cos\alpha - l\sin\alpha) = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$, $\alpha \approx 39°$.

188. Так как стержень AB невесом и $AC = 2BC$, то натяжение левой нити вдвое меньше натяжения правой. Пусть натяжение левой нити равно T, а правой — $2T$. Тогда на нижний стержень будут действовать: вес P, приложенный в середине стержня DF, сила T, направленная вверх и приложенная в точке D, сила $2T$, направленная вверх и приложенная в точке K, и реакция шарнира, приложенная в точке F. Составив уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку F, получим:

$$T \cdot 4a + 2Ta - P \cdot 2a = 0,$$

откуда $T = \frac{P}{3}$. Таким образом, натяжение левой нити равно $\frac{P}{3}$, а правой — $\frac{2P}{3}$.

189. На балку действуют: сила тяжести P, реакции R и N пола и выступа, а также натяжение нити T (рис. 287). Спроецировав эти силы на оси x и y, получим:

$$N \cos 30^\circ - T = 0;$$
$$N \cos 60^\circ - P + R = 0.$$

Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C:

$$P \frac{CD}{2} \cos 60^\circ - N \cdot BC = 0.$$

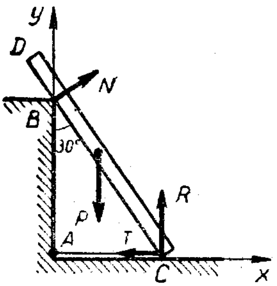


Рис. 287

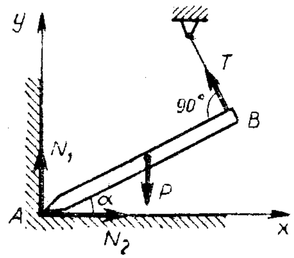


Рис. 288

Подставив сюда $P = 600$ *н*, $CD = 4$ *м*, $BC = 2\sqrt{3}$ *м* и решив полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем:

$$T = 150 \text{ н}, N = 173 \text{ н}, R = 513 \text{ н}.$$

190. На стержень действуют сила тяжести P, натяжение T, реакция пола N_1 и реакция стены N_2 (рис. 288). Запишем уравнения проекций на ось x и ось y:

$$N_2 - T \sin \alpha = 0,$$
$$N_1 - P + T \cos \alpha = 0$$

и уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A:

$$P \frac{AB}{2} \cos \alpha - T \cdot AB = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$T = \frac{P}{2} \cos \alpha, \quad N_1 = \frac{P}{2}(1 + \sin^2 \alpha), \quad N_2 = \frac{P}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

191. На стержень действуют: сила тяжести P, натяжение нити T и реакция шарнира R (рис. 289). Так как последняя неизвестна ни по величине, ни по направлению, то ее целесообразно разложить на горизонтальную составляющую R_x и вертикальную составляющую R_y (на рис. 289 сила R не показана, а показаны лишь ее составляющие). Далее будем иметь:

уравнение проекций на ось x:

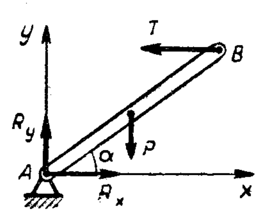


Рис. 289

$$R_x - T = 0;$$

уравнение проекций на ось y:

$$R_y - P = 0;$$

уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A:

$$P\frac{AB}{2}\cos\alpha - T\cdot AB\sin\alpha = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$T = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \quad R_x = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha, \quad R_y = P.$$

Величину реакции $\vec{R}$ легко найти по составляющим R_x, R_y:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = P\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}}.$$

4. Трение

192. Пусть лестница образует с полом угол α (рис. 290). На лестницу действуют: сила тяжести P, реакция стены R, реакция пола N и некоторая сила трения, приложенная в точке A. Величина этой силы является неопределенной, и единственное, что о ней можно сказать заранее, — это, что она не больше kN ($k = 0{,}5$). Однако эту неопределенность можно устранить, предполагая, что угол α является предельным, т. е. таким, что малейшее его уменьшение приводит к скольжению лестницы. Тогда сила трения будет в точности равна kN (см. рис. 290), и дальше получим:

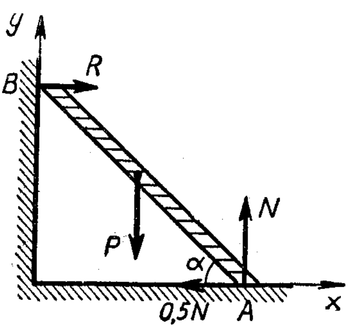


Рис. 290

уравнения проекций на оси x и y:

$$R - 0{,}5N = 0,$$

$$N - P = 0;$$

уравнение моментов относительно точки A:

$$P\frac{AB}{2}\cos\alpha - R\,AB\sin\alpha = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$N = P,\ R = 0{,}5P,\ \operatorname{tg}\alpha = 1,\ \alpha = 45^\circ.$$

Учитывая, что найденный угол является предельным, окончательно получим $\alpha \geqslant 45°$.

193. На стержень действуют силы, показанные на рис. 291 (F — сила трения). Далее будем иметь:

уравнения проекций на оси x и y:

$$R \cos 45° - F = 0,$$

$$R \cos 45° + N - P = 0;$$

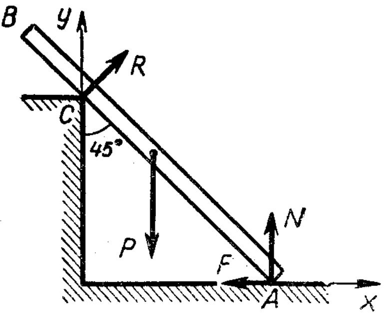


Рис. 291

уравнение моментов относительно точки A:

$$P\, 0{,}5\, AB \cos 45° - R\, 0{,}75\, AB = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$R = \frac{2}{3} P \cos 45°, \quad F = \frac{1}{3} P, \quad N = \frac{2}{3} P.$$

Учитывая, что $F \leqslant kN$ и, следовательно, $k \geqslant \frac{F}{N}$, получим $k \geqslant 0{,}5$.

194. В этом случае на стержень будут действовать силы, показанные на рис. 292 (F — сила трения). Составив уравнение проекций на ось x, получим:

$$R \cos 45° - F \cos 45° = 0.$$

откуда $\frac{F}{R} = 1$ и, следовательно, $k \geqslant 1$.

195. Эта задача по существу не отличается от задачи 192. (Вместо горизонтальной реакции стены будет горизонтальное натяжение нити.) Поэтому, как и там, получим $\alpha \geqslant 45°$.

196. Так как при покоящейся тележке стержень давил на нее с

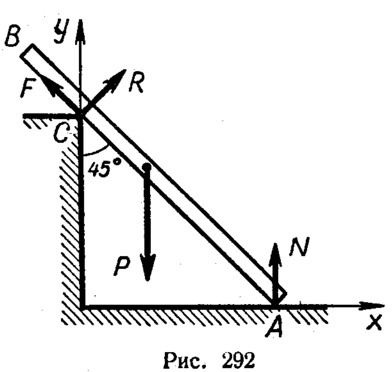


Рис. 292

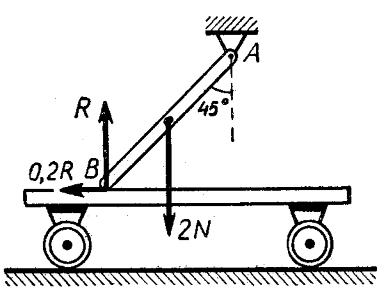


Рис. 293

силой N, то вес стержня равен $2N$. Поэтому, когда тележка будет двигаться влево, на стержень будут действовать следующие силы: сила тяжести $2N$, реакция R, сила трения $0,2R$ и реакция шарнира A (рис. 293; реакция шарнира на рисунке не показана). Составив уравнение моментов этих сил относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа, получим:

$$2N \cdot 0,5\, AB \sin 45^\circ - R \cdot AB \sin 45^\circ - 0,2R \cdot AB \cos 45^\circ = 0,$$

откуда $R = \frac{N}{1,2}$, и поэтому

$$F = 0,2R = 0,2 \frac{N}{1,2} \approx 0,17\ N,$$

где F — сила трения между стержнем и тележкой. Значит, чтобы сдвинуть тележку влево, нужна горизонтальная сила, равная примерно $0,17\ N$.

197. В этом случае сила трения $0,2R$ будет направлена не влево, а вправо. Поэтому

$$2N \cdot 0,5\, AB \sin 45^\circ - R \cdot AB \sin 45^\circ + 0,2R \cdot AB \cos 45^\circ = 0,$$

откуда $R = 1,25\ N$ и $F = 0,2R = 0,25\ N$.

5. Простые машины

198. Вообразим, что точка A перемещается на расстояние s в направлении силы F. Тогда сила F совершит работу Fs, которая пойдет на увеличение потенциальной энергии груза P. Но точка B при этом поднимется на s, а точка C опустится на $\frac{sr}{R}$. Следовательно, груз P поднимется на

$$\frac{s - s\frac{r}{R}}{2},$$

и поэтому

$$Fs = P\frac{s - s\frac{r}{R}}{2},$$

откуда

$$F = P\frac{R - r}{2R}.$$

199. Когда вал повернется на угол φ, груз P поднимется на

$$\frac{r\varphi - r'\varphi}{2}.$$

Так как работа, совершаемая искомой силой F, идет на увеличение потенциальной энергии груза, то

$$FR\varphi = P\frac{r\varphi - r'\varphi}{2},$$

где FR — момент силы F. Отсюда находим:

$$F = P\frac{r - r'}{2R}.$$

200. Когда червяк сделает один оборот, вращающий момент M совершит работу $M2\pi$. При этом шестерня повернется на один зуб и груз поднимется на $\frac{2\pi R}{30}$. Следовательно,

$$M2\pi = P\frac{2\pi r}{30},$$

откуда $M = \frac{PR}{30}$.

201. В этом случае получим:

$$0{,}8\,M2\pi = P\frac{2\pi R}{30}$$

(см. решение задачи 200). Следовательно, $M = \frac{PR}{24}$.

202. Вообразим, что первое колесо повернулось на угол φ по часовой стрелке. Тогда второе колесо повернется на угол $\varphi\frac{R_1}{R_2}$ против часовой стрелки, а третье — на угол $\varphi\frac{R_1}{R_3}$ по часовой стрелке. При этом вращающие моменты совершат работу

$$M_1\varphi - M_3\varphi\frac{R_1}{R_3}.$$

Приравняв эту работу нулю, найдем: $M_3 = M_1\frac{R_3}{R_1}$.

203. Рассуждая, как в задаче 202, получим:

$$M_1\varphi + M_2\varphi\frac{R_1}{R_2} - M_3\,\varphi\frac{R_1}{R_3} = 0,$$

$$M_3 = \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2}\right)R_3.$$

204. Вообразим, что точка A перемещается вверх на расстояние s. Тогда точка B переместится на $3s$ и, следовательно, $Fs = P3s$. Отсюда $F = 3P$.

205. Из рис. 102 видно, что чашки весов могут перемещаться лишь *поступательно*. Следовательно, величина перемещения гири не зависит от ее положения на чашке весов, из чего заключаем, что равновесие не нарушится.

§ 9. ТЯГОТЕНИЕ

1. Закон всемирного тяготения

206. Радиус каждого шара $R \approx 1{,}4$ *м*. Искомая сила равна

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{(10^5)^2}{2{,}8^2} = 0{,}34\ (н) \approx 35\ (гс).$$

207. Сила притяжения двух одинаковых масс равна

$$F = G\frac{m^2}{r^2},$$

а ускорение каждой из этих масс равно

$$a = G\frac{m}{r^2}.$$

Подставив сюда $a = 1$ *м/сек*^{2}, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *н* $\cdot$ *м*^{3}/*кг*^{2} и $r = 1$ *м*, получим:

$$m = 15 \cdot 10^9\ кг = 15 \cdot 10^6\ т.$$

208. Эта высота определяется равенством $F = m\omega^2(R + H)$, где m — масса тела, ω — угловая скорость Земли, R — радиус Земли и F — сила притяжения этого тела к Земле. Так как $F = mg\dfrac{R^2}{(R+H)^2}$, то $m\omega^2(R + H) = mg\dfrac{R^2}{(R+H)^2}$, откуда $H = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2}{\omega^2}} - R$. Подставив соответствующие числовые данные, получим $H \approx 36\,000$ *км*.

209. Так как первая космическая скорость равна $\sqrt{Rg}$, то

$$v = \sqrt{176 \cdot 10^4\ м\ \frac{9{,}8\dfrac{м}{сек^2}}{6}} \approx 1\,700\ \frac{м}{сек} = 1{,}7\ \frac{км}{сек}.$$

210. Так как $v = \sqrt{Rg}$, то

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

211. Из равенств

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}, \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

получим:

$$v = R\sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho}.$$

Следовательно,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

212. Используя ответ к предыдущей задаче, получаем:

$$T = 48 \text{ сек.}$$

213. Пусть масса Солнца равна M, масса планеты равна m и радиус планетной орбиты равен r. Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r\sqrt{r}.$$

Последнее равенство показывает, что период обращения планеты пропорционален $r\sqrt{r}$. Так как $30\sqrt{30} \approx 165$, то продолжительность года на Нептуне составляет 165 земных лет.

214. Скорость Земли $v = \frac{2\pi r}{T}$, а ускорение

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

где r — радиус орбиты, а T — период обращения (1 год). С другой стороны,

$$a = G\frac{M}{r^2},$$

где M — масса Солнца. Следовательно,

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = G\frac{M}{r^2},$$

откуда $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$. Но так как объем Солнца $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, где R — радиус Солнца, то

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\pi}{GT^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Произведя вычисления, получим $\rho \approx 1400$ *кг/м*^{3} $= 1{,}4$ *г/см*^{3}.

215. Так как расстояние между звездами все время равно $2R$, то

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{m^2}{(2R)^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{4R}}.$$

216. В этом случае получим:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{m^2}{(2R)^2} + G\frac{m^2}{R^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{5Gm}{4R}}.$$

2. Гравитационное поле планеты

217. Искомая энергия равна разности

$$W = W_\infty - W_R,$$

где W_∞ — потенциальная энергия тела в бесконечности, а W_R — на поверхности Земли. По формуле (50) (см. стр. 47) получим:

$$W = -\frac{mgR^2}{\infty} - \left(-\frac{mgR^2}{R}\right) = mgR.$$

218. Если бросить тело вверх со второй космической скоростью, то оно уйдет в бесконечность, где его скорость уменьшится до нуля. Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = W_\infty - W_R,$$

где v — искомая скорость, а W_∞ и W_R — потенциальная энергия этого тела в бесконечности и на поверхности Земли. Далее по формуле (50) получим:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{mgR^2}{\infty} - \left(-\frac{mgR^2}{R}\right),$$

$$v = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 64 \cdot 10^5} = 11\,200 \text{ (м/сек)} = 11{,}2 \text{ (км/сек)}.$$

219. Так как вторая космическая скорость равна $\sqrt{2gR}$ (см. решение предыдущей задачи), то для Луны получим:

$$v = \sqrt{2\,\frac{9{,}8}{6} \cdot 176 \cdot 10^4} \approx 2\,400 \text{ (м/сек)} = 2{,}4 \text{ (км/сек)}.$$

220. Если v — вторая космическая скорость, то

$$\frac{mv^2}{2} = W_\infty - W_R,$$

где W_∞ — потенциальная энергия тела в бесконечности, а W_R — на поверхности планеты. Но

$$W_\infty - W_R = -G\frac{Mm}{\infty} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = G\frac{Mm}{R},$$

и поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{R},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

221. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv_0^2}{2} = W - W_0,$$

где W — потенциальная энергия в высшей точке, а W_0 — у поверхности Земли. Но согласно формуле (50) (см. стр. 47)

$$W = -\frac{mgR^2}{R+H}, \quad W_0 = -\frac{mgR^2}{R},$$

где H — искомая высота. Следовательно,

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right),$$

откуда

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

Подставив сюда $v_0 = 6 \cdot 10^3$ *м/сек*, $R = 6400 \cdot 10^3$ *м*, $g \approx 10$ *м/сек*^{2}, найдем: $H \approx 2500 \cdot 10^3$ *м* $= 2500$ *км*.

(Если пользоваться формулой $H = \frac{v_0^2}{2g}$, не учитывающей изменения силы тяжести с высотой, то получится $H \approx 1800$ *км*, т. е. заметно меньше.)

222. Из закона сохранения энергии получаем:

$$W_\infty - W_0 = -\frac{mgR^2}{\infty} - \left(-\frac{mgR^2}{R}\right) = mgR,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_\infty^2}{2} = mgR,$$

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - 2gR} = \sqrt{(15 \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 6400 \cdot 10^3} \approx 10 \cdot 10^3 \left(\frac{м}{сек}\right)$$

223. Согласно решению предыдущей задачи

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - 2gR},$$

где R — радиус планеты, а g — ускорение свободного падения на ее поверхности. Но $2gR$ есть квадрат второй космической скорости (см. решение задачи 218). Следовательно,

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v^2},$$

где v — вторая космическая скорость. Произведя вычисления, получим:

$$v_\infty = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\ (км/сек).$$

224. Пусть масса Земли равна m, масса Солнца равна M и искомая скорость равна u. Тогда

$$\frac{mu^2}{2} = -G\frac{Mm}{r} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right),$$

где r — радиус земной орбиты, а R — радиус Солнца. С другой стороны,

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2},$$

где v — орбитальная скорость Земли. Исключив из этих равенств M, получим:

$$u^2 = 2v^2\frac{r-R}{R}.$$

Подставив сюда $v = 30$ *км/сек*, $r = 15 \cdot 10^7$ *км*, $R = 7 \cdot 10^5$ *км*, найдем: $u = 620$ *км/сек*.

225. На высоте $H = R$ сила тяжести вчетверо меньше, чем на Земле. Поэтому

$$\frac{mv^2}{R+R} = \frac{mg}{4},$$

откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{4}.$$

Потенциальная энергия спутника относительно поверхности Земли равна разности

$$W - W_0 = -\frac{mgR^2}{2R} - \left(-\frac{mgR^2}{R}\right) = \frac{mgR}{2}.$$

Сравнив последний результат с предыдущим, видим, что кинетическая энергия этого спутника вдвое меньше его потенциальной энергии относительно поверхности Земли.

226. Искомая энергия равна

$$W = -\frac{mgR^2}{R+h} - \left(-\frac{mgR^2}{R}\right) = mgh\frac{R}{R+h}.$$

Если $h \ll R$, то $W \approx mgh$.

§ 10. КОЛЕБАНИЯ

227. Пусть T — период колебаний на земле, а T' — на высоте h. Тогда $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$ где g' — ускорение свободного падения на этой высоте. Но $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$, и поэтому

$$T' = T\frac{R+h}{R} = T\left(1+\frac{h}{R}\right), \quad \frac{T'}{T} = 1{,}01 = 1 + \frac{h}{R}$$

где R — радиус Земли. Так как $R = 6400$ *км*, то искомая высота равна 64 *км*.

228. По мере продвижения к центру Земли ускорение свободного падения уменьшается пропорционально расстоянию от этого центра. Следовательно, $g' = \dfrac{g(R-h)}{R}$ и

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{R}{R-h}} = T\sqrt{\frac{R}{R-h}}.$$

Так как $\dfrac{T'}{T} = 1{,}01$, то $\dfrac{R}{R-h} = (1{,}01)^2$, откуда $h \approx 126$ *км*.

229. При $\alpha = 20°$ — около 1%, а при $\alpha = 45°$ — около 4%.

230. Груз не будет скользить по платформе, если

$$kmg \geqslant m|a|_{\max},$$

где k — коэффициент трения, а $|a|_{\max}$ — максимальное ускорение платформы. Так как

$$|a|_{\max} = A\omega^2 = 0{,}01\,(2\pi\cdot 2)^2 = 1{,}58\left(\frac{м}{сек^2}\right)$$

и $kg = 0{,}2\cdot 9{,}8 = 1{,}96$ (*м/сек²*), то это условие выполняется.

231. 1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{450}} \approx 0{,}42$ (*сек*).

2) На Луне период будет таким же.

232. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$ и $\delta = \dfrac{mg}{c}$, где δ — деформация пружины при неподвижно висящем грузе. Из этих равенств получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}} = 0{,}45\ сек.$$

233. Когда груз максимально удалится от положения равновесия, пружины приобретут потенциальную энергию $\dfrac{cA^2}{2}$, где A — амплитуда колебаний. Следовательно, $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{cA^2}{2}$, откуда

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{c}} = 0{,}04\ м = 4\ см.$$

234. Начальная энергия груза равна $\dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{cx^2}{2}$, где $x = 3$ *см*. Поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = \frac{cA^2}{2},$$

откуда

$$A=\sqrt{x^2+\frac{m}{c}v_0^2}=0{,}05\ м=5\,см.$$

235. Пусть N обозначает натяжение нити. Тогда

$$mg-N=ma,$$

где a — ускорение груза в процессе колебаний. (За положительное принимаем направление сверху вниз.) Отсюда

$$N=m\,(g-a),$$

и, для того чтобы нить была все время натянута, должно выполняться неравенство

$$|a|_{\max}<g.$$

Но так как $|a|_{\max}=A\omega^2=2(5\cdot 2\pi)^2\approx 2000$ ($см/сек^2$), то это неравенство не выполняется. Следовательно, указанные в условии колебания невозможны. (Расстояние AB станет уменьшаться, груз начнет «подпрыгивать», и его движение примет сложный негармонический характер.)

236. Первый маятник имеет длину

$$l_1=\frac{g}{4\pi^2}T_1^2,$$

а второй —

$$l_2=\frac{g}{4\pi^2}T_2^2.$$

Искомый период равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{T_1^2g}{4\pi^2}+\frac{T_2^2g}{4\pi^2}}{g}}=\sqrt{T_1^2+T_2^2}=5\ сек.$$

237. Так как $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$, то искомый период равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{c}}=\sqrt{4\pi^2\frac{m_1}{c}+4\pi^2\frac{m_2}{c}}.$$

Но

$$4\pi^2\frac{m_1}{c}=T_1^2,\qquad 4\pi^2\frac{m_2}{c}=T_2^2,$$

и, следовательно,

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}=1\ сек.$$

238. Рассмотрим этот вагон в промежуточный момент времени (рис. 294). Внутри Земли сила тяжести изменяется прямо пропорционально расстоянию от центра O. Поэтому

$$P = mg\,\frac{OB}{R},$$

и

$$P_x = -P\cos\alpha = -\frac{mg}{R}\,OB\cos\alpha = -\frac{mg}{R}\,x,$$

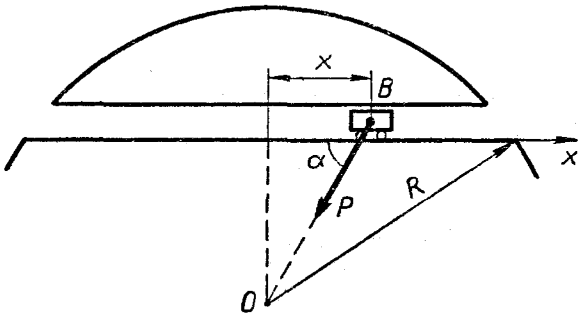


Рис. 294

где P_x — проекция силы тяжести на ось x. Мы видим, что сила, движущая вагон, является восстанавливающей, с коэффициентом $k = \frac{mg}{R}$. Следовательно, вагон будет совершать гармонические колебания между Москвой и Ленинградом. Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

что после вычислений дает $T \approx 84$ *мин.* Поэтому на движение от Москвы до Ленинграда будет затрачено примерно 42 *мин.*

239. Пусть точка находится в положении O в момент $t = 0$. Тогда ее движение будет описываться уравнением

$$x = A\sin\omega t.$$

Если на путь от O до D потребовалось время $t = t_1$, а на первую половину этого пути было затрачено время $t = t_2$, то

$$A\sin\omega t_1 = A,\quad A\sin\omega t_2 = A/2.$$

Отсюда получим:

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{2},\quad \omega t_2 = \frac{\pi}{6},$$

$$t_1 : t_2 = 3,\quad t_2 = \frac{t_1}{3} = 1\,сек.$$

240. $v = \frac{CD}{T/2} = \frac{4A}{T}$, где A — амплитуда. Значит,

$$v = \frac{4A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2A\omega}{\pi} = \frac{2v_{\max}}{\pi} = \frac{2 \cdot 10}{\pi} \approx 6{,}4 \text{ (м/сек)}.$$

241. Так как

$$3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t = 5 \sin (\omega t + \alpha),$$

где α — угол, определяемый равенствами

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

то это гармонические колебания с амплитудой $A = 5$.

§ 11. ДВИЖУЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

242. Пусть поезд движется вправо. Тогда на маятник будет действовать сила инерции $m\vec{a}$, направленная влево (m — масса маятника). Складываясь с силой $m\vec{g}$, направленной вниз, она даст силу

$$m\sqrt{g^2 + a^2} = mg',$$

направленную так, как вектор $\vec{g'}$ на рис. 295. Значит, маятник будет себя вести так, будто поле силы тяжести направлено не вниз, а вдоль вектора $\vec{g'}$ и ускорение свободного падения имеет величину g'.

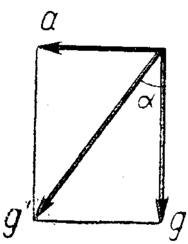


Рис. 295

Поскольку вектор $\vec{g'}$ отклонен от вертикали на угол

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{g},$$

то на столько же будет отклонен и маятник.

243. 1) В кабине лифта на маятник будет действовать сила инерции, сообщая ему ускорение a, направленное вниз. Складывая его с ускорением силы тяжести, получим ускорение $g + a$. Следовательно, искомый период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}.$$

2) В этом случае период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{|g - a|}}.$$

(Если $a > g$, то маятник будет колебаться не около нижнего положения, а около верхнего.)

244. Из решения задачи 242 заключаем, что $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, и, следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}.$$

(Колебания этого маятника будут совершаться не около вертикали, а около «кажущейся» вертикали, определяемой направлением вектора g' на рис. 295.)

245. Наблюдателю, находящемуся в вагоне, будет казаться, что сила тяжести направлена как вектор $\vec{g}'$ на рис. 295. Поэтому отклонение маятника назад он будет рассматривать как движение к положению равновесия. Отсюда следует, что угол максимального отклонения маятника от вертикали равен

$$\varphi = 2\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{g} .$$

246. Наблюдателю, находящемуся в вагоне, будет казаться, что ускорение силы тяжести направлено вдоль вектора $\vec{g}'$, показанного на рис. 295. Поэтому искомая скорость равна $v = \sqrt{2g'h'}$, где h' — уменьшение «высоты», измеренное вдоль кажущейся вертикали OC (рис. 296). Далее, так как

$$h' = AA' = l\cos\alpha - l\sin\alpha,$$

то

$$v = \sqrt{2l\,(g'\cos\alpha - g'\sin\alpha)} = \sqrt{2l\,(g - a)}$$

(см. рис. 295). Подставив числовые значения, найдем:

$$v = \sqrt{2 \cdot 1\,(9{,}8 - 1{,}8)} = 4\ (м/сек).$$

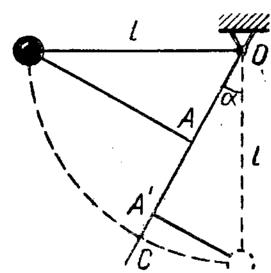


Рис. 296

247. Пусть поезд движется справа налево. Тогда кажущаяся вертикаль будет направлена вдоль линии OC (рис. 296). Следовательно, скорость маятника в момент отклонения на угол α будет равна

$$v = \sqrt{2g'CA'} = \sqrt{2g'l\,(1 - \cos\alpha)}\ .$$

Далее, так как $a = 9{,}8$ $м/сек^2 = g$, то $g' = g\sqrt{2}$ и $\alpha = 45°$ (см. рис. 295). Поэтому искомая скорость равна

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\sqrt{2} \cdot 1 \cdot (1 - \cos 45°)} = 2{,}85\ (м/сек).$$

248. На брусок действуют: сила тяжести mg, направленная вниз, сила инерции ma, направленная влево, натяжение нити T, направленное от точки A к точке B, и реакция плоскости N, направленная перпендикулярно силе T. Направив ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно ей, получим следующие уравнения равновесия бруска:

$$\left.\begin{aligned} T - mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0,\\ N - mg\cos\alpha + ma\sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$T = mg\sin\alpha + ma\cos\alpha,$$

$$N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha.$$

249. На брусок будут действовать все силы, перечисленные при решении предыдущей задачи, кроме силы T. Проецируя эти силы на ось, направленную вдоль плоскости вниз, получим уравнение движения бруска:

$$ma_{\text{отн}} = ma\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$a_{\text{отн}} = a\cos\alpha - g\sin\alpha.$$

250. Рассмотрим стержень в системе отсчета, поступательно движущейся вместе с точкой A. В этой системе на стержень действуют: сила тяжести mg, приложенная в центре стержня, сила инерции ma, приложенная в той же точке и направленная влево, и реакция шарнира A. (Реакция горизонтальной плоскости отсутствует, так как она по условию равна нулю.) Так как стержень находится в покое (в указанной системе отсчета), то получаем следующее уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A:

$$mg\,0{,}5\,AB\cos\alpha - ma\,0{,}5\,AB\sin\alpha = 0.$$

Отсюда $a = g\operatorname{ctg}\alpha$.

251. Брусок станет поворачиваться вокруг точки C, если вращающий момент силы инерции будет больше вращающего момента силы тяжести:

$$ma\,\frac{h}{2} > mg\,\frac{l}{2}\,\cdot$$

Отсюда $a > \dfrac{gl}{h}$.

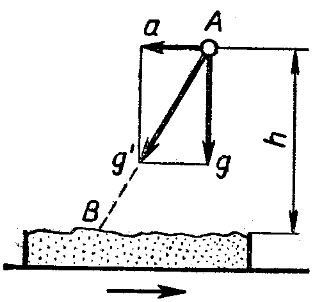


Рис. 297

252. Относительно лифта камень имеет ускорение $g + a$. Следовательно, искомое количество теплоты равно

$$Q = m(g + a)\,h.$$

253. Из рис. 297 получаем:

$$Q = mg'AB = m\sqrt{g^2 + a^2}\cdot h\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{g} = mgh\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right).$$

254. Согласно принципу Галилея этот велосипедист сможет так же легко удерживать равновесие, как и на палубе неподвижного корабля.

§ 12. ГИДРО- И АЭРОМЕХАНИКА

255. Пусть искомое давление равно p. Тогда жидкость будет действовать на поршень с силой R, равной ps', где s' — площадь скошенной части поршня. Так как сила R направлена под углом α к вертикали, а поршень находится в равновесии, то $F = R\cos\alpha$. Подставив сюда $R = ps'$ и учтя, что $s'\cos\alpha = s$, получим $p = \frac{F}{s}$.

256. Поршни со штоком образуют одно твердое тело. На него действуют: сила F, направленная вниз, сила pS, направленная вверх, и сила ps, направленная вниз. Так как это тело находится в равновесии, то

$$F + ps = pS,$$

откуда

$$p = \frac{F}{S - s}.$$

257. Пусть искомое повышение равно h. Тогда в правом колене уровень ртути будет выше, чем в левом, на $2h$. Значит, $\rho g 2h = \rho_0 g H$, где ρ — плотность ртути и ρ_0 — плотность воды. Отсюда

$$h = \frac{H\rho_0}{2\rho} = 5\ \text{мм}.$$

258. Пусть в левом сосуде уровень ртути понизится на h_1, а в правом — на h_2. Тогда в среднем сосуде он повысится на $h_1 + h_2$ и станет выше, чем в левом, на $2h_1 + h_2$ и выше, чем в правом, на $2h_2 + h_1$. Поэтому

$$\rho g\,(2h_1 + h_2) = \rho_0 g H_1,\quad \rho g\,(2h_2 + h_1) = \rho_0 g\, H_2.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} 2h_1 + h_2 &= \frac{\rho_0}{\rho} H_1, \\ 2h_2 + h_1 &= \frac{\rho_0}{\rho} H_2. \end{aligned}\right\}$$

Здесь ρ и ρ_0 — плотности ртути и воды, H_1 — высота столба воды в левом сосуде и H_2 — в правом. Подставив сюда $\frac{\rho_0}{\rho} = 1/13,6$, $H_1 = 102$ *мм* и $H_2 = 153$ *мм* и решив эту систему уравнений, найдем:

$$h_1 + h_2 = 6,25\ \text{мм}.$$

259. Высоту 26 *см*, о которой говорится в условии, обозначим через h_0. Тогда понижение ртути в левом колене будет равно $h - h_0$ и таким же будет повышение уровня в правом колене. Следовательно,

$$\rho_0 g h = \rho g 2 (h - h_0),$$

откуда

$$h = \frac{2\rho/\rho_0}{2\rho/\rho_0 - 1} h_0 = \frac{2 \cdot 13,6}{2 \cdot 13,6 - 1} \cdot 26 \approx 27 \text{ (см)}.$$

260. Так как уровни AA и BB одинаковы и атмосферное давление над ними одинаково, то вода переливаться не будет.

261. Вода будет переливаться из правого сосуда в левый.

262. Так как вес всего, что находится в сосуде, не изменится, то не изменится и сила давления на дно. Отсюда следует, что уровень воды останется прежним.

263. Так как вес всего, что находится в сосуде, не изменится, то не изменится и сила давления на дно. Но до того, как лед растаял, она была силой давления воды, а после таяния льда она станет складываться из силы давления воды и силы давления свинца. Следовательно, давление воды станет меньшим, из чего заключаем, что уровень воды понизится. (В этом рассуждении не учтена сила атмосферного давления, но она здесь несущественна.)

264. Уровень не изменится. (См. решение задачи 262.)

265. Так как вес шара ничтожно мал, то после того, как он улетит, сила давления на дно не изменится. Следовательно, уровень воды тоже не изменится.

266. На жидкость действуют: сила тяжести P, направленная вниз, реакция дна, равная $\rho g H S$ и направленная вверх, реакция боковой поверхности, направленная вверх и равная по величине искомой силе R. Следовательно,

$$P - \rho g H S - R = 0,$$

откуда $R = P - \rho g H S$.

267. В этом случае реакция боковой поверхности направлена вниз, и поэтому

$$P + R - \rho g H S = 0,$$

откуда $R = \rho g H S - P$.

268. В системе отсчета, связанной с сосудом, роль вектора $\vec{g}$ играет вектор $\vec{g}'$ (см. рис. 295). Поэтому свободная поверхность воды будет перпендикулярна к этому вектору, т. е. будет отклонена от горизонтали на угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}.$$

269. $p = p_0 + \rho g' h$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды, g' — новое ускорение силы тяжести (см. рис. 295) и h — расстояние от точки A до линии BC (рис. 120). Так как $h = AB\cos\alpha$, где α — угол наклона поверхности воды, то $p = p_0 + \rho g' AB\cos\alpha$. Учтя, что $g'\cos\alpha = g$, получим:

$$p = p_0 + \rho g\, AB.$$

270. Сила, с которой вода действует на куб, равна не $\rho g V$, а $\rho g V + p_0 S$, где p_0 — атмосферное давление, а S — площадь грани куба. (Но сила, действующая на куб со стороны *воды* и *атмосферы*, равна $\rho g V$.)

271. За счет уменьшения потенциальной энергии воды.

272. Согласно условию имеем:

$$\left.\begin{aligned} P - \rho_1 g V &= P_1, \\ P - \rho_2 g V &= P_2, \\ P - \rho' g V &= P', \end{aligned}\right\}$$

где P — вес тела в воздухе, V — его объем, P' — вес тела в глицерине, а ρ_1, ρ_2, ρ'—плотности воды, керосина и глицерина.Решив эту систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем:

$$P' = \frac{\rho' - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} P_1 - \frac{\rho' - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2} P_2.$$

Подставив заданные значения, получим:

$$P' = 2{,}25 P_1 - 1{,}25 P_2.$$

273. Пусть плотность первой жидкости равна ρ_1, а второй — ρ_2. Тогда

$$\rho_1 g S h_1 = P, \quad \rho_2 g S h_2 = P, \quad \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} g S h = P,$$

где S — площадь грани куба, P — его вес, $h_1 = 40$ *мм*, $h_2 = 60$ *мм* и h — искомая глубина погружения. Исключив из этих равенств ρ_1 и ρ_2, получим:

$$h = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} = 48 \text{ мм}.$$

274. Пусть ребро куба равно l, а толщина слоя верхней жидкости равна h. Тогда

$$F_1 = \left[p_0 + \rho_1 g\left(h - \frac{l}{2}\right)\right] l^2, \quad F_2 = \left[p_0 + \rho_1 g h + \rho_2 g \frac{l}{2}\right] l^2,$$

где F_1 — сила, действующая на верхнюю грань куба, F_2 — на нижнюю и p_0 — атмосферное давление. Так как куб находится в равновесии, то

$$F_1 + \rho g l^3 = F_2,$$

где ρ — искомая плотность. Подставив сюда выражения для F_1 и F_2 из двух предыдущих равенств, получим: $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

275. Пусть высота стакана равна H, площадь его дна равна S и плотность воды равна ρ. На стакан действуют: сила тяжести P, направленная вниз, сила натяжения нити, равная N и направленная вверх, сила атмосферного давления, равная p_0S и направленная вниз, сила давления воды, равная $(p_0 - \rho gH)\,S$ и направленная вверх. Следовательно,

$$N + (p_0 - \rho gH)\,S = P + p_0S,$$

откуда $N = P + \rho gHS$. Но так как $\rho gHS = P'$, то $N = P + P'$.

276. Когда кран был закрыт, ртуть, расположенная выше пунктирного уровня (см. рис. 122), имела потенциальную энергию $\rho gSH\,\frac{H}{2}$. Когда уровни ртути сравнялись, потенциальная энергия ртути, расположенной выше пунктирного уровня, стала равной $\rho gSH\,\frac{H}{4}$. Следовательно, искомое количество тепла равно

$$Q = \rho gSH\,\frac{H}{2} - \rho gSH\,\frac{H}{4} = \frac{\rho gSH^2}{4}.$$

277. Пусть P — вес камня, а P' — вес вытесненной им воды. Когда камень погружается на дно, его потенциальная энергия уменьшается на PH, а потенциальная энергия воды увеличивается на $P'H$. (Можно считать, что вода, вытесненная камнем, поднялась со дна на поверхность.) Искомое количество тепла будет определяться уменьшением потенциальной энергии, т. е.

$$Q = PH - P'H.$$

Подставив сюда $P = 0{,}26 \cdot 9{,}8$ *н*, $P' = 0{,}1 \cdot 9{,}8$ *н*, $H = 2$ *м*, получим $Q = 3{,}14$ *дж*.

278. Так как $\frac{1{,}29 - 0{,}09}{1{,}29 - 0{,}18} = 1{,}081$, то подъемная сила водорода на 8% больше подъемной силы гелия.

279. При равномерном движении парашюта сила тяжести уравновешивается силой сопротивления: $P = F$, т. е.

$$mg = k\rho Sv^2,$$

отсюда

$$S = \frac{mg}{k\rho v^2} = \frac{80 \cdot 9{,}8}{0{,}5 \cdot 1{,}29 \cdot 5^2} \approx 50\ (м^2).$$

ГЛАВА II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 13. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ

280. При нагревании однородных твердых тел все их линейные размеры увеличиваются в одинаковой степени. Следовательно, внутренний диаметр тоже увеличился на 0,5%.

281. $l_1 = 20\,(1 + 0{,}000012t)$ *см*, $l_2 = 10\,(1 + 0{,}000024t)$ *см*,

$$l_1 - l_2 = 10 \text{ см}.$$

282. Из равенства

$$(l_1 + l_2)(1 + \alpha t) = l_1(1 + \alpha_1 t) + l_2(1 + \alpha_2 t)$$

получаем:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1 + l_2}.$$

283. Так как $\beta t = 18 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 0{,}018$, то объем ртути увеличился на 1,8%. Так как $2\alpha t = 2 \cdot 24 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0{,}0048$, то площадь дна увеличилась на 0,48%. Следовательно, высота столба ртути увеличилась приблизительно на $1{,}8\% - 0{,}48\% = 1{,}32\%$.

284. Так как $3\alpha t = 3 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 0{,}00204$, то объем куска меди увеличится на 0,204%. Так как $\beta t = 15 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 0{,}006$, то плотность воды уменьшится на 0,6%. Следовательно, выталкивающая сила уменьшится приблизительно на $0{,}6\% - 0{,}204\% \approx 0{,}4\%$.

285. При нагревании на 1° стержень удлинится на $\Delta l = l \cdot 12 \cdot 10^{-6}$, где l — первоначальная длина стержня. Следовательно, искомая сила равна

$$F = ES\frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 240 \text{ н}.$$

§ 14. ТЕПЛОТА, РАБОТА, ЭНЕРГИЯ

286. Так как масса груза равна 1000 *кг*, масса остывающей воды равна 0,25 *кг*, то по закону сохранения энергии

$$mgH = cm_1(t_2 - t_1),$$

где m — масса груза, m_1 — масса остывающей воды. Подставив $m = 1000$ *кг*, $m_1 = 0,25$ *кг*, $t_2 - t_1 = 80°$ и $c = 1$ *ккал/кг·град* $=$ $= 4190$ *дж/кг·град*, получим $H = 8,38$ *м*.

287. $W = (13 \cdot 10^{20} \cdot 0,01 \cdot 4,19)/3600 \approx 15 \cdot 10^{15}$ (*квт · ч*), т. е. в 3000 раз больше годового производства электроэнергии.

288. $S = \dfrac{60\ \textit{вт}}{700\textit{дж}\cdot\textit{сек}^{-1}\cdot \textit{м}^{-2}} : 0,1 \approx 0,86\ \textit{м}^2.$

289. $m = 2\,\dfrac{50 \cdot 1 \cdot 3600 \cdot 24}{4,19 \cdot 7500} = 275\ (\textit{кг}).$

290. Кинетическая энергия вагона:

$$T = \frac{Mv^2}{2} = \frac{20000 \cdot 20^2}{2} = 4 \cdot 10^6\ (\textit{дж}).$$

Масса воздуха в вагоне:

$$m = \rho V = 1,3 \cdot 120 = 156\ (\textit{кг}).$$

Повышение температуры воздуха:

$$\Delta t = \frac{T}{mc} = \frac{4 \cdot 10^6}{156 \cdot 1000} \approx 26\ (\textit{град}).$$

291. Атмосферный воздух совершил работу

$$A = p_0 S\delta,$$

где p_0 — атмосферное давление, S — площадь поверхности ртути в широком сосуде и δ — понижение уровня в этом сосуде. Так как $p_0 = \rho gh$ и $S\delta = sh$, где ρ — плотность ртути, а s — площадь внутреннего сечения трубки, то эту работу можно представить в виде

$$A = \rho ghsh = mgh,$$

где $m = \rho hs$ — масса вошедшей ртути. Учтя, что потенциальная энергия ртути увеличилась на

$$\Delta W_p = \frac{mgh}{2},$$

приходим к выводу, что искомое количество тепла равно

$$Q = A - \Delta W_p = \frac{mgh}{2}.$$

292. Атомная масса углерода равна 12, а кислорода — 16. Значит, при неполном сгорании 1 *г* углерода образуется 28/12 *г* окиси углерода. Следовательно, искомое количество тепла

$$Q = (8080 - 2420) : \frac{28}{12} = 2425\ (\textit{кал}).$$

293. Энергия, ежесекундно излучаемая Солнцем,

$$W = 65 \cdot 10^6 \cdot 4\pi\,(7 \cdot 10^8)^2 = 4 \cdot 10^{26}\ (\textit{дж}).$$

Ежесекундная убыль массы Солнца:

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{4 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 44 \cdot 10^8\,(кг) = 4{,}4\,(млн.\ т)$$

(c — скорость света).

294. На нагревание комнаты.

295. Комнате передается энергия, потребляемая холодильником из электросети, и теплота, отнимаемая от охлаждаемой воды. Значит, искомое количество тепла равно

$$\frac{160 \cdot 60}{4{,}19 \cdot 1000} + 2 \approx 4{,}3\,(ккал).$$

296. Нет. Вся совершаемая работа идет на увеличение кинетической энергии молекул газа (если газ идеален).

297. Этого нельзя сделать посредством теплопередачи, но можно сделать различными другими способами. Например, давая холодному газу расширяться, можно сжать пружину. После этого потенциальную энергию сжатой пружины можно использовать для увеличения внутренней энергии горячего газа (посредством адиабатического сжатия или просто посредством перемешивания).

298. Этого нельзя сделать с помощью тепловой машины, работа которой представляет периодически повторяющийся (круговой) процесс. Если же не требовать, чтобы процесс был круговым, то это сделать можно. Например, теплоту, полученную газом от теплового резервуара, можно полностью превратить в работу посредством адиабатического расширения газа до первоначальной температуры. (При этом конечное состояние газа будет отлично от начального.)

299. Так как газ не совершает в конечном счете никакой работы, то его температура не уменьшится.

300. 0°C. (В каждом случае таяла лишь часть льда.)

301. Процесс кристаллизации закончится тогда, когда вода и образовавшийся лед будут иметь температуру 0°C.

Пусть масса воды равна M, а масса образовавшегося льда равна m. Найдем изменение внутренней энергии воды в результате образования льда:

1) вода массой $M - m$ осталась жидкой и нагрелась от —10 до 0°C. Значит, ее внутренняя энергия возросла на $10\,(M - m)$ (*кал*);

2) вода массой m превратилась в лед. Чтобы вычислить изменение ее внутренней энергии, будем считать, что она сначала нагрелась от —10 до 0°C, а затем затвердела. Следовательно, ее внутренняя энергия изменилась на $10m - 80\,m$ (*кал*), т. е. уменьшилась на $70\,m$ (*кал*).

Таким образом,

$$\Delta U = 10\,(M - m) - 70\,m,$$

и так как теплообмен происходил лишь между водой и образующимся льдом, то

$$10\,(M - m) - 70m = 0,$$

откуда $\frac{m}{M} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

§ 15. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

1. Уравнение состояния

302. $p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}$, где $m = 1$ *кг* (масса литра воды), $\mu = 18\ \frac{кг}{кмоль}$ (молекулярная масса воды), $R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{дж}{кмоль \cdot град}$, $T = 300°\mathrm{K}$ и $V = 0{,}001\ м^3$. Вычислив, получим: $p \approx 137 \times 10^6\ н/м^2 \approx 1370$ *атм.*

303. Так как моль составляет 1/1000 *кмоля*, то $m/\mu = 0{,}001$ *кмоль*. Поэтому $pV = 0{,}001\ RT$, откуда

$$V = \frac{0{,}001RT}{p} = \frac{0{,}001 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 300}{10^5} \approx 0{,}025\ (м^3) = 25\ (л).$$

304. В системе СИ

$$R = \frac{p}{m} \cdot \frac{V\mu}{T},$$

где p — давление в $н/м^2$ и m — масса в *кг*, а в системе, указанной в условии задачи,

$$R' = \frac{p'}{m'} \cdot \frac{V\mu}{T},$$

где p' — давление в *мм рт. ст.* и m' — масса в *г*. Но

$$m' = 1000m$$

и, как нетрудно вычислить,

$$p' = \frac{p}{133}.$$

Следовательно,

$$R' = \frac{p/133}{1000\,m} \cdot \frac{V\mu}{T} = \frac{R}{133 \cdot 10^3} = \frac{8{,}31 \cdot 10^3}{133 \cdot 10^3} = 62{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

305. $p = \frac{mRT}{\mu V} = 1{,}85 \cdot 10^5\ н/м^2$.

306. $m = \frac{pV\mu}{RT} = 0{,}022\ кг = 22\ г$.

307. При фиксированных значениях V и μ масса газа пропорциональна его давлению и обратно пропорциональна абсолютной температуре. Так как $p = 0{,}6\,p_0$ и $T = 0{,}8T_0$, то

$$m = \frac{0{,}6}{0{,}8} m_0 = 0{,}75\,m_0.$$

Следовательно, из сосуда выпустили 25% газа.

308. $\mu = \dfrac{mRT}{pV} = 2$ *кг/кмоль*. Следовательно, это водород.

309. Из уравнения Менделеева—Клапейрона видно, что если $V = \text{const}$ и $m = \text{const}$, то p пропорционально T и обратно пропорционально μ. Следовательно,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \cdot \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{400}{800} \cdot \frac{48}{32} = 0{,}75,$$

т. е. давление уменьшается на 25%.

310. $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\mu}{RT} = 1{,}23$ *кг/м*^{3}.

311. $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\mu}{RT}$. Так как $\dfrac{p}{RT} = 0{,}044$, то $\rho = 0{,}044\,\mu$.

312. Так как $\dfrac{p}{T} = \dfrac{p_0}{T_0}$, то $\dfrac{1{,}1p_0}{T_0 + 30^\circ} = \dfrac{p_0}{T_0}$, откуда $T_0 = 300^\circ$K, т. е. $t_0 = 27^\circ$C.

313. Так как $\dfrac{pV}{T} = \dfrac{p_0V_0}{T_0}$, то $\dfrac{1{,}2p_0 \cdot 0{,}9V_0}{T_0 + 16^\circ} = \dfrac{p_0V_0}{T_0}$ откуда $T_0 = 200^\circ$K, т. е. $t_0 = -73^\circ$C.

314. Так как $pV = p_0V_0$, то $1{,}2\,p_0\,(V_0 - 1\,л) = p_0V_0$, откуда $V_0 = 6$ *л*. Следовательно, искомое увеличение равно $\dfrac{6}{4} - 1 = 0{,}5 = 50\%$.

315. Согласно уравнению Менделеева—Клапейрона

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT,$$

где m_1 и m_2 — массы газа в первом и втором сосудах, а p — искомое давление. Записав последнее равенство в виде

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu} RT + \frac{m_2}{\mu} RT$$

и учтя два предыдущих равенства, получим:

$$p\,(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2.$$

откуда

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

316. Согласно уравнению Менделеева—Клапейрона

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT, \quad p_2V_2 = \frac{m}{\mu} RT,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{2m}{\mu} RT,$$

где p — искомое давление. Выразив из двух первых равенств V_1 и V_2 и подставив в третье, найдем:

$$p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2} = \frac{2 \cdot 4000 \cdot 6000}{4000 + 6000} = 4800 \ (н/м^2).$$

317. Согласно уравнению газового состояния

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{\mu} RT,$$

где p — искомое давление, а m_1, m_2, p_1, p_2 — известные массы и давления. Выразив из двух первых равенств V_1 и V_2 и подставив в третье, получим $p = 6 \cdot 10^5$ *н/м²*.

318. Давление воздуха над ртутью равно $760—40 = 720$ (*мм рт. ст.*). Когда уровни ртути сравняются, оно станет равным 760 *мм рт. ст.*, а высота столба воздуха будет равна 190 *мм* $\frac{720}{760} = 180$ *мм* (согласно закону Бойля—Мариотта). Следовательно, трубку нужно опустить на $40 + 190 - 180 = 50$ (*мм*).

319. Начальное давление в левом колене:

$$p_0 = 760 + 110 = 870 \ (мм\ рт.\ ст.).$$

Конечное давление в левом колене:

$$p = 760 + 110 + 40 - x = (910 - x) \ мм.\ рт.\ ст.,$$

где x — искомое повышение уровня. Но согласно закону Бойля—Мариотта

$$p_0l_0 = p(l_0 - x),$$

т. е. $870 \cdot 300 = (910 - x)(300 - x)$, откуда $x = 10$ *мм*.

320. Начальное давление в левом колене:

$$p_0 = 760 + 140 = 900 \ (мм\ рт.\ ст.).$$

Конечное давление в левом колене:

$$p = 760 + 140 + 2x = (900 + 2x) \ мм\ рт.\ ст.,$$

где x — искомое повышение уровня. Далее, из уравнения состояния получаем:

$$\frac{p_0 l_0 S}{T_0} = \frac{p(l_0 + x)S}{T},$$

где S — поперечное сечение трубки.

Следовательно,

$$\frac{900 \cdot 368}{300} = \frac{(900 + 2x)(368 + x)}{315},$$

откуда $x = 10$ *мм*.

321. Из рис. 125 видно что $\frac{p_2}{T_2} < \frac{p_1}{T_1}$. Учитывая, что $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$, приходим к выводу, что $V_2 > V_1$.

322. Из рис. 126 видно, что $\frac{V_2}{T_2} > \frac{V_1}{T_1}$. Учитывая, что $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$, приходим к выводу, что $p_2 < p_1$.

2. Закон Дальтона

323. Так как $\mu_1 = 32$ *кг/кмоль* и $\mu_2 = 28$ *кг/кмоль*, то $p = p_1 + p_2 = \left(\frac{0,002}{32} + \frac{0,003}{28}\right)\frac{RT}{V} = 4,23 \cdot 10^5$ $(н/м^2)$.

324. Из равенства, полученного при решении предыдущей задачи, находим:

$$T = \frac{32 \cdot 28 \cdot pV}{(0,002 \cdot 28 + 0,003 \cdot 32)R} = 355 \ (°К).$$

325. $p = p_1 + p_2 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}$. Подставив сюда $\mu_1 = 32 \frac{кг}{кмоль}$, $\mu_2 = 44 \frac{кг}{кмоль}$, а также известные числовые значения p, V, R и T, будем иметь:

$$\frac{m_1}{32} + \frac{m_2}{44} = \frac{1}{831}.$$

Так как, кроме того,

$$m_1 + m_2 = 0,04,$$

то получается система двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее, найдем: $m_1 = 0,0345$ *кг* $= 34,5$ *г*, $m_2 = 0,0055$ *кг* $= 5,5$ *г*.

326. Из равенств

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{0,76m}{28} \cdot \frac{RT}{V} = 0,0271 \frac{mRT}{V},$$

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{0,24m}{32} \cdot \frac{RT}{V} = 0,0075 \frac{mRT}{V},$$

$$p = p_1 + p_2 = 0,0346 \frac{mRT}{V},$$

получаем: $p_1 \approx 0,78p$, $p_2 \approx 0,22\ p$.

327. $p = p_1 + p_2 = p_1 + \frac{mRT}{\mu V} = 12770\ н/м^2$.

328. Подставив в равенство

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}$$

$\mu_1 = 32$ *кг/кмоль*, $\mu_2 = 44$ *кг/кмоль* и заданные значения величин p, m_1, m_2 и T, найдем: $V = 0,034\ м^3 = 34\ л$. Следовательно, $\rho = (32 + 22)/34 = 1,59\ г/л$.

329. Пусть температура, о которой говорится в условии, равна T, а давление равно p. Тогда

$$p = \frac{\rho_1 RT}{\mu_1}, \quad p = \frac{\rho_2 RT}{\mu_2},$$

где индекс *1* относится к газу A, а индекс 2 — к газу B. Далее, согласно закону Дальтона

$$p = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu_1} + \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu_2},$$

где m — масса каждого из смешиваемых газов, а V — объем, занимаемый смесью при температуре T и давлении p. Исключив из трех написанных равенств $\frac{RT}{\mu_1}$ и $\frac{RT}{\mu_2}$, получим:

$$\frac{m}{V} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Но объем V, очевидно, равен $\frac{2m}{\rho}$, где ρ — плотность смеси. Подставив это выражение в последнее равенство, найдем:

$$\rho = \frac{2\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 0,48\ кг/м^3.$$

330. Рассмотрим 1 $м^3$ воздуха. Пусть m_1 — масса содержащегося в нем кислорода, а m_2 — азота. Тогда

$$m_1 + m_2 = 1,273\ (кг).$$

Кроме того, согласно закону Дальтона

$$p = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V},$$

где $\mu_1 = 32 \frac{кг}{кмоль}$, $\mu_2 = 28 \frac{кг}{кмоль}$, p и T — заданные давление и температура и $V = 1$ $м^3$. Подставив числовые данные, будем иметь:

$$10^5 = \left(\frac{m_1}{32} + \frac{m_2}{28}\right) \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3 \cdot 273}{1}.$$

Первое и последнее равенства образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее, найдем:

$$m_1 = 0,313\ кг,\ m_2 = 0,96\ кг,$$

$$\frac{m_1 \cdot 100\%}{m_1 + m_2} = 24,7\%, \quad \frac{m_2 \cdot 100\%}{m_1 + m_2} = 75,3\%.$$

331. Согласно закону Дальтона

$$p = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \frac{RT}{V}.$$

С другой стороны, рассматривая эту смесь как газ с массой $m_1 + m_2$ и молекулярной массой μ, можем написать:

$$p = \frac{m_1 + m_2}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Сравнивая эти равенства, видим, что искомая молекулярная масса должна удовлетворять требованию

$$\frac{m_1 + m_2}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2},$$

откуда

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

332. Подставив в последнее равенство $\mu_1 = 28 \frac{кг}{кмоль}$, $\mu_2 = 32 \frac{кг}{кмоль}$, $m_1 = 0,76\ m$, $m_2 = 0,24\ m$, получим $\mu = 28,9 \frac{кг}{кмоль}$.

333. $p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT$, $p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2} RT$. Кроме того,

$$p = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2},$$

что с учетом двух предыдущих равенств можно записать в виде

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Полученный результат показывает, что искомое давление не зависит от молекулярных масс μ_1, μ_2 (при заданных значениях p_1, V_1, p_2, V_2).

334. Если в равенства

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \quad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT,$$

$$p = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2}$$

подставить $m_1/\mu_1 = m_2/\mu_2 = 1$, они примут вид:

$$p_1V_1 = RT, \quad p_2V_2 = RT, \quad p = \frac{2RT}{V_1 + V_2}.$$

Выразив из двух первых равенств V_1 и V_2 и подставив в третье, получим:

$$p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}.$$

335. Так как $\mu_1 = 32\ \frac{кг}{кмоль}$ и $\mu_2 = 44\ \frac{кг}{кмоль}$, то

$$p_1V_1 = \frac{mRT}{32}, \quad p_2V_2 = \frac{mRT}{44},$$

$$p = \frac{m}{32} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2} + \frac{m}{44} \cdot \frac{RT}{V_1 + V_2}.$$

Выразив из двух первых равенств V_1 и V_2 и подставив в третье, получим:

$$p = \frac{19p_1p_2}{8p_1 + 11p_2}.$$

§ 16. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГАЗА

336. Так как этот газ расширялся (см. решение задачи 321), то он совершил положительную работу. С другой стороны, так как его температура повышалась, то его внутренняя энергия стала большей. Следовательно, ему было сообщено некоторое количество тепла.

337. Так как давление этого газа уменьшалось быстрее, чем при изотермическом расширении, то его температура падала. С другой стороны, так как давление уменьшалось медленней, чем при адиабатическом процессе, то к газу подводилось тепло.

338. Так как к азоту не подводилось тепло, то его внутренняя энергия уменьшилась на 300 *дж*. Из равенства $\Delta U = c_V m\Delta t$ находим, что его температура понизилась на $\frac{300}{1 \cdot 745} \approx 0{,}4°$.

339. Так как $\Delta Q = c_V m\Delta T + p\Delta V$, то

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = c_V + \frac{p\Delta V}{m\Delta T} = 800 \ \frac{дж}{кг \cdot град}.$$

340.

$$c = c_V - \frac{p\Delta V}{m\Delta T} = 600 \frac{дж}{кг \cdot град}.$$

341. Так как $Q = c_V m\Delta T + p(V_2 - V_1)$ и

$$p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_2 - \frac{m}{\mu} RT_1 = \frac{m}{\mu} R\Delta T,$$

то

$$Q = c_V m\Delta T + \frac{m}{\mu} R\Delta T,$$

откуда

$$\Delta T = \frac{Q}{c_V m + \frac{m}{\mu} R} \approx 2{,}1^\circ.$$

342. При решении предыдущей задачи было получено равенство

$$Q = c_V m\Delta T + \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Следовательно,

$$c_p = \frac{Q}{m\Delta T} = c_V + \frac{R}{\mu} = 917 \frac{дж}{кг \cdot град}.$$

343. 1) Так как давление изменяется очень мало, то работу, совершенную газом при расширении, можно считать равной $p_0(V - V_0)$, где p_0 — начальное давление, V_0 — начальный объем и V — конечный объем. Поэтому

$$p_0(V - V_0) = c_V m(T_0 - T),$$

где T_0 — начальная температура, а T — конечная. Учитывая, что $V = 1{,}01\ V_0$, получаем:

$$p_0\, 0{,}01 V_0 = c_V m(T_0 - T).$$

С другой стороны, так как

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0,$$

то предыдущее равенство принимает вид:

$$0{,}01 \frac{m}{\mu} RT_0 = c_V (T_0 - T),$$

откуда

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{0{,}01R}{\mu c_V} = 0{,}004 = 0{,}4\ \%.$$

2) Из последнего равенства следует, что $T = 0{,}996\ T_0$. Учитывая, что $V = 1{,}01 V_0$, и пользуясь уравнением $\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0}$,

получим:

$$\frac{p\cdot 1{,}01\ V_0}{0{,}996\ T_0} = \frac{p_0V_0}{T_0},$$

откуда

$$p = 0{,}986\ p_0, \quad \frac{p_0 - p}{p_0} = 0{,}014 = 1{,}4\%.$$

344. Из равенства

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} = \frac{0{,}99p_0\cdot 1{,}02\ V_0}{T}$$

получаем:

$$T = 1{,}01T_0,\ T - T_0 = 0{,}01\ T_0.$$

Следовательно, внутренняя энергия азота увеличилась на

$$\Delta U = c_V\, m(T - T_0) = 0{,}01 c_V\, mT_0.$$

Далее, если пренебречь незначительным уменьшением давления, то

$$A = p_0(V - V_0) = p_0\cdot 0{,}02V_0 = 0{,}02\,\frac{m}{\mu}\,RT_0,$$

и поэтому

$$Q = \Delta U + A = 0{,}01\ c_V\, mT_0 + 0{,}02\frac{m}{\mu}\ RT_0.$$

Сравнивая два последних равенства, будем иметь:

$$\frac{A}{Q} = \frac{0{,}02\,\frac{R}{\mu}}{0{,}01c_V + 0{,}02\,\frac{R}{\mu}} = 0{,}44 = 44\ \%.$$

345. 1) При $p = 0{,}98p_0$ получится: $\Delta U = 0$, $\frac{A}{Q} = 1$. (Расширение изотермическое, вся подведенная теплота превращается в работу.)

2) Если $p = 0{,}975\ p_0$, то $\frac{A}{Q} = 2{,}68$. В этом случае $\Delta U < 0$ и $A > Q$, т. е. работа совершается за счет подводимой теплоты и за счет уменьшения внутренней энергии.

346. В стакане воды содержится $\frac{\rho_1 V}{\mu_1} N$ молекул и $\frac{3\rho_1 V}{\mu_1} N$ атомов, а в стакане ртути — $\frac{\rho_2 V}{\mu_2} N$ молекул и столько же атомов. Подставив числовые данные, получим:

$$n_1 = 3\,\frac{1000}{18} VN = 167\ VN, \quad n_2 = \frac{13600}{200,6} VN = 68\ VN.$$

Следовательно, $n_1 > n_2$.

347. Стакан вмещает около 0,2 *кг* воды. Это составляет

$$\frac{0,2}{18} \cdot 6,02 \cdot 10^{26} \approx 6,7 \cdot 10^{24} \text{ молекул.}$$

Так как в кубометре содержится 5000 стаканов, то искомое число меченых молекул равно

$$\frac{6,7 \cdot 10^{24}}{13 \cdot 10^{17} \cdot 5000} \approx 1030.$$

348. $m = \frac{\mu}{N} = \frac{18\,\frac{кг}{кмоль}}{6,02 \cdot 10^{26}\,\frac{1}{кмоль}} \approx 3 \cdot 10^{-26}\ кг = 3 \cdot 10^{-23}\ г.$

349. Число молекул, заключенных в единице объема, зависит только от температуры и давления и не зависит от рода газа. Поэтому в литре сырого воздуха содержится столько же молекул, сколько в литре сухого (при заданных p и T). Но сырой воздух получается из сухого посредством замены некоторых молекул кислорода и азота молекулами воды. А так как молекула воды легче молекулы кислорода или азота, то сырой воздух легче сухого.

350. Из уравнения $pV = nkT$ получаем:

$$n = \frac{pV}{kT} = 1,45 \cdot 10^{24}.$$

351. $n = \frac{pV}{kT} \approx 24.$

352. Так как давление и объем воздуха остались неизменными, то

$$n_0 = \frac{pV}{kT_0}, \qquad n = \frac{pV}{kT},$$

$$\frac{n}{n_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{288}{300} = 0,96.$$

Следовательно, число молекул уменьшилось на 4%.

353. Из уравнения состояния получаем:

$$p_1V_1 = n_1kT, \; p_2V_2 = n_2kT,$$
$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2)\,kT,$$

где p — искомое давление. Выразив из двух первых равенств V_1 и V_2 и подставив в третье, найдем:

$$p = \frac{p_1p_2(n_1+n_2)}{p_1n_2+p_2n_1}.$$

354. Пусть m_1 и m_2 — массы молекул кислорода и азота, а v_1 и v_2 — их средние скорости. Тогда будем иметь:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_2v_2^2}{2}, \; v_2 = v_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = v_1\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 460\sqrt{\frac{32}{28}} = 490 \text{ (м/сек)}.$$

355. Так как $T \sim \frac{mv^2}{2}$, то $v \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$ или $v \sim \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Поэтому искомая скорость равна

$$460\sqrt{\frac{373}{273}\cdot\frac{32}{2}} = 2150 \text{ (м/сек)}.$$

356. Так как $T \sim \frac{mv^2}{2}$, то $v \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$ или $v \sim \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Но $pV = \frac{m}{\mu}RT$, поэтому $\frac{T}{\mu} \sim \frac{pV}{m}$, т. е. $\frac{T}{\mu} \sim \frac{p}{\rho}$. Отсюда следует, что $v \sim \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}$.

357. Так как гелий — одноатомный газ, то каждую его молекулу (атом) можно рассматривать как материальную точку. Поэтому внутренняя энергия гелия равна

$$U = n\frac{mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{2},$$

где m — масса одного атома, а M — масса всего газа. В то же время

$$U = c_V MT,$$

поэтому

$$\frac{Mv^2}{2} = c_V MT,$$

откуда

$$v = \sqrt{2c_V T} = 1370 \text{ м/сек}.$$

358. Так как температура идеального газа пропорциональна квадрату средней скорости его молекул, то

$$\frac{\Delta T}{150} = \frac{600^2 - 500^2}{500^2 - 400^2},$$

где ΔT — искомое повышение температуры. Отсюда $\Delta T \approx 183°$.

359. Так как масса азота в сосудах одинакова, то

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2},$$

где T_1 и T_2 — начальные температуры азота, а T — конечная. Но температура газа пропорциональна квадрату средней скорости его молекул. Поэтому

$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{400^2 + 500^2}{2}} = 453\ (м/сек).$$

360. Так как $v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ (см. задачу 356), то $p \sim \rho v^2$ и $\frac{p}{p_0} = (1{,}2)^2 = 1{,}44$. Тогда $\frac{p - p_0}{p_0} = 0{,}44 = 44\ \%$.

§ 18. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

361. Пусть p_0 — давление снаружи пузыря, p_1 — в его стенке (она имеет толщину) и p_2 — внутри пузыря. Тогда согласно формуле (89) (стр. 69) будем иметь:

$$p_1 - p_0 = \frac{2\sigma}{R}, \quad p_2 - p_1 = \frac{2\sigma}{R}.$$

Следовательно, искомая разность давлений

$$p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{R} = \frac{4 \cdot 0{,}07}{0{,}02} = 14\ (н/м^2).$$

362. Если налить ртуть до высоты h, то у отверстия образуется капля в форме полушара. Поэтому

$$p = p_0 + \frac{2\sigma}{D/2} = p_0 + \frac{4\sigma}{D},$$

где p — давление в капле, а p_0 — атмосферное давление. Но, так как капля находится на глубине h, то давление

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Значит, $p_0 + \frac{4\sigma}{D} = p_0 + \rho g h$, откуда $h = \frac{4\sigma}{\rho g D} = 14$ *мм*.

363. Сила тяжести и сила инерции сообщают телам в лифте ускорение $2g$. Поэтому

$$h = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r(\rho 2g)} = \frac{2\sigma\cos\Theta}{2r\rho g} = \frac{\sigma\cos\Theta}{r\rho g}.$$

364. На высоту h_2 над уровнем воды в сосуде.

365. Согласно известной формуле гидростатики, $p = p_0 - \frac{\rho g h}{2}$, где ρ — плотность воды.

366. $p_B - p_A = \frac{2\sigma}{R}$, где R — радиус поверхности жидкости. (В капиллярных трубках поверхность жидкости имеет почти сферическую форму.) Зная расстояние $2r$ и угол Θ, легко найти, что $R = \frac{r}{\cos\Theta}$. Следовательно,

$$p_B - p_A = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r}.$$

(Если жидкость несмачивающая, то $p_B - p_A$ нужно заменить на $p_A - p_B$.)

367. Пусть A — точка, лежащая под поверхностью ртути в трубке, а B — над этой поверхностью. Так как $p_A - p_B = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r}$ (см. решение предыдущей задачи), то

$$p_A = p_B + \frac{2\sigma\cos\Theta}{r} = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r}.$$

Но $p_A = p_0 - \rho g h$, где p_0 — атмосферное давление, а ρ — плотность ртути. Следовательно,

$$\frac{2\sigma\cos\Theta}{r} = p_0 - \rho g h,$$

откуда

$$h = \frac{p_0}{\rho g} - \frac{2\sigma\cos\Theta}{r\rho g}.$$

Учитывая, что $\frac{p_0}{\rho g} = 760$ *мм* $= 0{,}76$ *м*, получаем:

$$h = 0{,}76 - \frac{2\cdot 0{,}47\cdot\cos 40^\circ}{0{,}0005\cdot 13600\cdot 9{,}8} = 0{,}749\ м = 749\ мм.$$

368. Пусть A — точка непосредственно под мениском, а B — непосредственно над ним. Тогда $p_A - p_B = \frac{2\sigma}{R}$, где R — радиус мениска. С другой стороны, $p_A - p_B = \rho g h$, где ρ — плотность ртути, а h — глубина погружения трубки. Следовательно, $\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$, откуда $R = \frac{2\sigma}{\rho g h}$. Зная радиус мениска, находим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R} = \frac{r\rho g h}{2\sigma} = 0{,}354,\ \alpha \approx 69^\circ.$$

369. Так как краевой угол равен нулю, то радиус мениска равен радиусу трубки. Поэтому давление под мениском равно $p_0 - \frac{2\sigma}{r}$, а давление на уровне AA равно

$$p_{AA} = p_0 - \frac{2\sigma}{r} + \rho g h,$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды и h — высота слоя масла. Так как, с другой стороны,

$$p_{AA} = p_0 + \rho' g h,$$

где ρ' — плотность масла, то

$$p_0 - \frac{2\sigma}{r} + \rho g h = p_0 + \rho' g h,$$

откуда

$$h = \frac{2\sigma}{rg(\rho - \rho')} \approx 0{,}15\ м = 15\ см.$$

370. Под левым мениском вода имеет давление

$$p_1 = p_0 - \frac{2\sigma}{r_1},$$

а под правым —

$$p_2 = p_0 - \frac{2\sigma}{r_2},$$

где p_0 — давление атмосферного воздуха. Следовательно,

$$\left(p_0 - \frac{2\sigma}{r_2}\right) - \left(p_0 - \frac{2\sigma}{r_1}\right) = \rho g h,$$

откуда

$$h = \frac{2\sigma(r_2 - r_1)}{\rho g r_1 r_2} = 0{,}0146\ м = 1{,}46\ см.$$

371. Считая каплю сферической, будем иметь:

$$p_1 = \rho g 2R, \quad p_2 = \frac{2\sigma}{R},$$

где p_1 — гидростатическое давление в нижней точке капли, а p_2 — давление, создаваемое поверхностным слоем. Следовательно,

$$\rho g 2R \leqslant 0{,}1\,\frac{2\sigma}{R},$$

откуда

$$R \leqslant \sqrt{\frac{0{,}1\sigma}{\rho g}} \approx 0{,}0006\ м = 0{,}6\ мм.$$

372. Поверхностная энергия восьми капель равна

$$W_1 = \sigma\,(8 \cdot 4\pi R^2) = 32\pi R^2\sigma,$$

а поверхностная энергия одной большой капли равна

$$W_2 = \sigma 4\pi(2R)^2 = 16\pi R^2\sigma.$$

Значит,

$$Q = W_1 - W_2 = 16\pi R^2\sigma \approx 6 \cdot 10^{-6}\ \text{дж}.$$

373. $A = \sigma(S_2 - S_1)$, где S_1 — начальная поверхность капли, а S_2 — конечная. Но $S_1 = \pi\, 10^{-6}\ м^2$ и, как нетрудно вычислить, $S_2 = \frac{20}{3}\pi \cdot 10^{-6}\ м^2$ (если пренебречь боковой поверхностью расплющенной капли). Следовательно,

$$A = 0{,}47\left(\frac{20}{3}\pi - \pi\right) \cdot 10^{-6} = 8{,}4 \cdot 10^{-6}\ (\text{дж}).$$

374. Пленка не будет иметь форму цилиндра с образующими, параллельными AA' и CC'. Она несколько прогнется внутрь, и силы, действующие на рамку на участках ABC и $A'B'C'$, будут иметь составляющие, направленные вниз.

§ 19. НАСЫЩАЮЩИЕ И НЕНАСЫЩАЮЩИЕ ПАРЫ

375. Так как стакан воды содержит $\frac{0{,}2}{18}$ киломолей, то число молекул воды в нем

$$n = \frac{0{,}2}{18} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} \approx 0{,}7 \cdot 10^{25}.$$

Следовательно, искомое время равно

$$t = \frac{0{,}7 \cdot 10^{25}}{10^{21} \cdot 40} = 175\ \text{сек} \approx 3\ \text{мин}.$$

376. При температуре 100°C насыщающий пар воды имеет давление 760 *мм рт. ст* $\approx 10^5\ н/м^2$ (так как 100°C — температура кипения воды при давлении 760 *мм рт. ст.*). Поэтому из уравнения Менделеева—Клапейрона получаем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = \frac{18 \cdot 10^5}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 373} \approx 0{,}6\ (кг/м^3).$$

377. Если давление измерять в *мм рт. ст.*, а плотность — в $г/м^3$, то $R = 62{,}5 \cdot 10^{-3}\,\frac{мм\ рт.\ ст. \cdot м^3}{моль \cdot град}$ (см. решение задачи 304). Поэтому при $t = 20$°C будем иметь:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{pV}{m} = \frac{RT}{\mu} = \frac{62{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 293}{18} = 1{,}017.$$

378. Искомое давление равно $p = p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 — парциальные давления воздуха и водяного пара при 100°С. Первое из этих давлений равно

$$p_1 = p_0 \frac{T}{T_0} = 760 \frac{373}{273} = 1038\,(\textit{мм рт. ст.}),$$

а второе —

$$p_2 = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{m \cdot 62{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 373}{18 \cdot 0{,}01} = 129{,}4m\,(\textit{мм рт. ст.}),$$

т. е. зависит от массы водяного пара, которая заранее неизвестна (так как неизвестно, вся ли вода испарилась). Сделаем предположение, что вода испарилась полностью. Тогда $m = 3$ *г* и $p_2 = 129{,}4 \cdot 3 = 388$ (*мм рт. ст.*).

Это давление получилось меньше того, которое имеет насыщающий пар воды при 100°С (последнее равно 760 *мм рт. ст.*). Следовательно, наше предположение верно.

Тогда $p = p_1 + p_2 = 1038 + 388 = 1426$ (*мм рт. ст.*).

379. Из уравнения Менделеева—Клапейрона получаем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = 0{,}091\ \textit{кг/м}^3 = 91\ \textit{г/м}^3.$$

380. При $t = 10$°С плотность насыщающего пара воды равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = 0{,}0094\ \textit{кг/м}^3 = 9{,}4\ \textit{г/м}^3.$$

Так как эта величина меньше, чем 50 $\textit{г/м}^3$, то часть водяного пара сконденсируется и абсолютная влажность будет иметь найденное значение 9,4 $\textit{г/м}^3$.

381. Найдем плотность насыщающего пара воды при температуре 20°С. Из уравнения состояния получаем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = 0{,}0173\ \textit{кг/м}^3 = 17{,}3\ \textit{г/м}^3.$$

Следовательно, искомое количество воды равно

$$m = 40 \cdot 0{,}5 \cdot 17{,}3 - 40 \cdot 0{,}2 \cdot 17{,}3 = 208\quad (\textit{г}).$$

382. Выделим в этом воздухе объем, равный 1 $\textit{м}^3$. Масса содержащегося в нем водяного пара равна

$$m_1 = \frac{\mu_1 p_1 V}{RT} = \frac{18 \cdot 2330 \cdot 1}{RT}\,(\textit{кг}),$$

а масса сухого воздуха —

$$m_2 = \frac{\mu_2 p_2 V}{RT} = \frac{29\,(10^5 - 2330) \cdot 1}{RT}\,(\textit{кг}).$$

Складывая эти числа, находим массу влажного воздуха в 1 $м^3$:

$$m = m_1 + m_2 = \frac{29 \cdot 10^5 - 11 \cdot 2330}{RT} \, (кг).$$

Но если бы воздух совсем не содержал водяного пара, в 1 $м^3$ содержалась бы масса

$$m' = \frac{\mu_2 p V}{RT} = \frac{29 \cdot 10^5 \cdot 1}{RT} \, (кг).$$

Сравнивая два последних результата, видим, что влажный воздух легче сухого на

$$\frac{m' - m}{m'} = \frac{11 \cdot 2330}{29 \cdot 10^5} = 0{,}0088 = 0{,}88\%.$$

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

§ 20. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Закон Кулона, напряженность, потенциал

383. $F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \approx 9000$ *н* $= 918$ *кгс*.

384. Сила электростатического взаимодействия равна

$$F_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{23 \cdot 10^{-29}}{r^2} (н),$$

а сила гравитационного взаимодействия —

$$F_2 = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{55 \cdot 10^{-72}}{r^2} (н).$$

Следовательно, $\frac{F_1}{F_2} \approx 4{,}2 \cdot 10^{42}$.

385. Так как грамм электронов имеет заряд

$$Q = \frac{0{,}001}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 17{,}6 \cdot 10^7 к,$$

то искомая сила равна

$$F = \frac{(17{,}6 \cdot 10^7)^2}{4\pi\varepsilon_0 (10^{11})^2} = 28\,000\ н \approx 2860\ кгс.$$

386. Так как атомная масса меди равна 63,54, а ее порядковый номер — 29, то искомый заряд равен

$$Q = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{63{,}54} \cdot 29 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 44 \cdot 10^6 (к).$$

Через лампочку карманного фонаря такой заряд проходит за

$$t = \frac{44 \cdot 10^6}{0{,}28} = 157 \cdot 10^6 (сек) \approx 5 (лет).$$

387. Из неравенства

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} < E_0,$$

где $E_0 = 3 \cdot 10^6$ *в/м*, получаем:

$$R > \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E_0}} \approx 55\ м.$$

388. Так как $36/9 = 4$, то точка B вдвое дальше от центра поля, чем точка A. Следовательно, $r_C/r_A = 1,5$, и поэтому

$$E_C = \frac{E_A}{(1,5)^2} = \frac{36}{2,25} = 16\ (в/м).$$

389. 1) Так как точка O лежит внутри каждой сферы, то $E_O = 0$.

2) Так как точка A лежит вне сферы *1* и внутри сферы *2*, то

$$E_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (OA)^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2}.$$

3) Так как точка B лежит вне каждой сферы, то

$$E_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (OB)^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (OB)^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2}.$$

390. 1) Напряженности, создаваемые в точке A плоскостями *1* и *2*, имеют одинаковую величину и противоположные направления; поэтому $E_A = 0$.

2) Напряженности, создаваемые в точке B плоскостями *1* и *2*, одинаковы по величине и направлению. Так как каждая из этих напряженностей равна $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, то $E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

391. Считая заряды пластин положительными, получим:

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}, \quad E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Подставив сюда $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*, $E_A = 3000$ *в/м*, $E_B = 1000$ *в/м* и решив эту систему уравнений, найдем:

$$\sigma_1 = 3,54 \cdot 10^{-8}\ к/м^2, \quad \sigma_2 = -1,77 \cdot 10^{-8}\ к/м^2.$$

Так как первая плотность получилась положительной, а вторая — отрицательной, то нижняя пластина заряжена положительным электричеством, а верхняя — отрицательным.

392. По выходе из конденсатора электрон будет иметь продольную скорость v_0 и поперечную скорость $v = at$, где a — ускорение электрона и t — время его движения в конденсаторе. Так как $a = \frac{eE}{m}$ и $t = \frac{l}{v_0}$, то

$$v = \frac{eEl}{mv_0}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{v_0} = \frac{eEl}{mv_0^2}, \quad E = \frac{mv_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{el}.$$

393. Заряд всех электронов этого шара $Q_0 = 44 \cdot 10^6$ *к* (см. решение задачи 386). Заряд электронов, которые нужно удалить:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi = 1,11 \cdot 10^{-3}\ к.$$

Так как $Q_0/Q \approx 40 \cdot 10^9$, то из каждых сорока миллиардов электронов нужно удалить один.

394. $\varphi_A = k\dfrac{Q}{r_A}$, $\qquad \varphi_B = k\dfrac{Q}{r_B}$,

$$\varphi_C = k\frac{2Q}{r_A + r_B},$$

где Q — величина точечного заряда, создающего поле, а k — коэффициент пропорциональности (числовое значение которого несущественно). Выразив из двух первых равенств r_A и r_B и подставив в третье, получим:

$$\varphi_C = \frac{2\varphi_A\varphi_B}{\varphi_A + \varphi_B} = 24 \text{ в}.$$

395. Так как потенциал поверхности шара равен 100 *в*, а потенциал точки A равен 50 *в*, то расстояние OA вдвое больше радиуса шара. Следовательно, $R = 15$ *см*.

396. Так как $\varphi = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R}$, то $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0\varphi}{R}$.

397. Так как $F = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, то $Q = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}$, где l — расстояние между центрами шариков, а F — сила, необходимая для подъема нижнего шарика. Следовательно,

$$U = 2\varphi = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{F}{\pi\varepsilon_0}},$$

где R — радиус шарика, а $F = mg$. Подставив сюда $l = 20$ *мм*, $R = 1$ *мм*, $F = 10^{-5}\cdot 9{,}8$ *н* и $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ *ф/м*, получим $U \approx \approx 38\,000$ *в*.

398. 1) Так как точка O лежит внутри каждой сферы, то $\varphi_O = \varphi_{O1} + \varphi_{O2}$, где φ_{O1} и φ_{O2} — потенциалы точки O в полях, созданных каждой сферой в отдельности. Так как последние равны потенциалам на поверхностях сфер, то

$$\varphi_O = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

2) Так как точка A лежит вне сферы *1* и внутри сферы *2*, то

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

3) Так как точка B лежит вне каждой сферы, то

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2}.$$

399. Искомая разность потенциалов равна

$$U = \frac{A}{Q},$$

где A — работа, совершаемая полем плоскостей при перемещении заряда Q из точки A в точку B. Но между плоскостями 1 и 2 напряженность этого поля равна нулю, а над плоскостью 2 она равна $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (см. решение задачи 390). Поэтому

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}s$$

и $U = \frac{\sigma s}{\varepsilon_0}$, где s — расстояние точки B от плоскости 2.

400. Рассуждая как в задаче 399, получим $U = \frac{\sigma\,|s_1 - s_2|}{\varepsilon_0}$, где s_1 — расстояние точки A от плоскости 1, а s_2 — расстояние точки B от плоскости 2.

401. Потенциальная энергия заряженной частицы, находящейся в электрическом поле, равна $Q\varphi$. Следовательно, на пути от A к B поле совершило работу

$$A = Q(\varphi_A - \varphi_B) = Q\left(k\frac{Q'}{l} - k\frac{Q'}{2l}\right) = \frac{kQQ'}{2l},$$

а на пути от A к C — работу

$$A' = Q(\varphi_A - \varphi_C) = Q\left(k\frac{Q'}{l} - k\frac{Q'}{1{,}5\,l}\right) = \frac{kQQ'}{3l},$$

где Q — заряд частицы, Q' — заряд, создающий поле, и l — расстояние точки A от центра поля. Сравнивая A' с A, получаем:

$$A' = \frac{2}{3}A = 4\ \text{дж}.$$

402. Из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = W_0 - W = e(\varphi_0 - \varphi) = -e\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Следовательно:

$$v = \sqrt{-\frac{eQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}},$$

что после подстановки числовых значений дает $v \doteq 4000$ *км/сек*.

403. Так как существенно только взаимное расположение этих зарядов, то один из них можно условно считать неподвижно закрепленным. Тогда искомая энергия будет равна $Q_2\varphi$, где φ — потенциал поля, созданного первым зарядом в точке, где находится второй заряд. Учитывая, что $\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l}$, получаем:

$$W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

404. Из закона сохранения энергии следует, что

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

(см. формулу, полученную при решении предыдущей задачи). Значит,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 ml}},$$

что после подстановки числовых значений дает $v \approx 160$ *м/сек*.

405. Из решения задачи 403 следует, что

$$W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

406. Из закона сохранения энергии следует, что

$$3\frac{mv^2}{2} = W_0 = \frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 ml}},$$

что при $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*, $l = 0{,}01$ *м* дает $v = 225$ *м/сек*.

407. 1 *эв* $= -e\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к* $\cdot 1$*в* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

2. Проводники в электрическом поле

408. Если бы шар *B* был соединен проволокой не с внутренней поверхностью шара *A*, а с наружной, то он приобрел бы положительный заряд. Но шар *A* является проводником, и поэтому потенциал его внутренней поверхности таков же, как наружной. Следовательно, шар *B* зарядится и тогда, когда он соединен с внутренней поверхностью шара *A*.

409. Проводник *A* полый, проводник *B* находится внутри проводника *A*.

410. До соединения:

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = k\frac{Q_2}{R_2}, \quad Q_1 + Q_2 = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{k}.$$

После соединения:

$$\varphi = k\frac{Q_1'}{R_1}, \quad \varphi = k\frac{Q_2'}{R_2}, \quad Q_1' + Q_2' = \frac{(R_1 + R_2)\varphi}{k},$$

где φ — искомый потенциал, а Q'_1, Q'_2 — конечные заряды шаров. Учитывая, что $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$, получаем:

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}.$$

(В этом решении потенциал шара считался равным $\frac{kQ}{R}$, т. е. не учитывалось влияние каждого из шаров на потенциал другого. Так как шары удалены на большое расстояние, то это влияние незначительно.)

411. Если формулы

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{R_1}, \qquad \varphi_2 = k\frac{Q}{R_2}$$

разрешить относительно R_1, R_2 и подставить полученные выражения в равенство, выведенное при решении предыдущей задачи, то будем иметь:

$$\varphi = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = 24\ \textit{в}.$$

412. Так как $\varphi = k\dfrac{4\pi R^2\sigma}{R} = 4\pi kR\sigma$, то

$$\varphi_1 = 4\pi kR_1\sigma, \quad \varphi_2 = 4\pi kR_2\sigma.$$

Выразив отсюда R_1, R_2 и подставив в равенство, полученное при решении задачи 410, найдем:

$$\varphi = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} = 26\ \textit{в}.$$

413. После соединения проволокой потенциал шара A стал уменьшаться, а шара B — увеличиваться. Но до соединения потенциалы этих шаров были почти одинаковы (так как зазор между шарами очень мал). Поэтому, соединив шары проволокой, мы почти не изменили потенциала шара A (так же, как и шара B).

414. На правой стороне пластинки индуцируются положительные заряды, а на левой — отрицательные. Они создадут внутри пластинки поле с напряженностью

$$E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность зарядов. В результате сложения полей E' и E в пластинке образуется результирующее поле

$$E - E' = E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

и так как пластинка является проводником, то $E - E' = 0$, откуда $\sigma = \varepsilon_0 E$. Следовательно, искомый заряд $Q = \varepsilon_0 ES$.

415. На правой стороне пластинки *2* индуцируется положительный заряд, а на левой — отрицательный. Они создадут в пластинке поле напряженностью

$$E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q'}{\varepsilon_0 S},$$

где Q' — величина заряда, индуцированного на каждой стороне пластинки. Но, кроме поля E', в пластинке *2* будет поле

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

созданное зарядом пластинки *1*. Учитывая, что пластинка *2* является проводником и поэтому $E - E' = 0$, получаем $Q' = \frac{Q}{2}$.

416. Пусть на левой стороне пластинки *2* находится заряд x, а на правой — заряд y. Так как поле внутри этой пластинки отсутствует, то

$$E + E_x - E_y = 0,$$

где E — напряженность поля, созданного зарядом Q_1, а E_x и E_y — напряженности полей, создаваемых зарядами x и y. Следовательно,

$$\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{x}{2\varepsilon_0 S} - \frac{y}{2\varepsilon_0 S} = 0,$$

и так как

$$x + y = Q_2,$$

то, решив полученную систему уравнений, найдем:

$$x = \frac{Q_2 - Q_1}{2} = 0{,}001\ \kappa, \qquad y = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 0{,}003\ \kappa.$$

417. Пусть на наружной поверхности большего шара находится заряд x, а на внутренней — заряд y. Так как поле между этими поверхностями создается зарядом Q меньшего шара и зарядом y на внутренней поверхности большего шара, то $E = \frac{kQ}{R^2} + \frac{ky}{R^2}$, где R — радиус большего шара. Но так как этот шар — проводник, то $\frac{kQ}{R^2} + \frac{ky}{R^2} = 0$, откуда $y = -Q = -0{,}002\ \kappa$. Следовательно, $x = Q - y = 0{,}004\ \kappa$.

418. Поле между пластинками есть результат суперпозиции внешнего поля E и поля E', созданного индуцированными зарядами. В первом из этих полей разность потенциалов между пластинками равна Ed, а во втором — $E'd$, и так как пластинки соединены проводящей проволокой, то $Ed - E'd = 0$, откуда $E = E'$. (Поле E направлено слева направо, а поле E' — справа налево.) Далее, так как

$$E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

то $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ и, следовательно, $Q = \varepsilon_0 ES$.

419. Так как шарик A находится внутри сферы и удален от шарика B, то

$$\varphi_A = \frac{Q'}{r} + \frac{Q}{R},$$

где Q' — заряд шарика A. Так как шарик B удален от шарика A и от сферы, то

$$\varphi_B = -\frac{Q'}{r}.$$

Наконец, так как шарики соединены проводящей проволокой, то $\varphi_A = \varphi_B$, т. е. $\frac{Q'}{r} + \frac{Q}{R} = -\frac{Q'}{r}$, откуда $Q' = -\frac{Qr}{2R}$. Знак полученного ответа показывает, что индуцированный заряд шарика A отрицателен, а шарика B — положителен.

420. Пусть заряд меньшего шара равен Q. Тогда его потенциал будет равен

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

а потенциал большего шара —

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0.$$

Учитывая, что $\varphi_1 - \varphi_2 = E$, получаем:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = E, \quad Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 ERr}{R - r}.$$

421. Так как $\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и $\varphi_B = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, то

$$E = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

и, следовательно, $Q = 2\pi\varepsilon_0 rE$.

422. Так как шарики B и C имеют одинаковый потенциал и одинаковый радиус, то их заряды одинаковы. Поэтому если $Q_A = Q$, то $Q_B = Q_C = -\frac{Q}{2}$. Далее будем иметь:

$$E = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

откуда $Q = \frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 rE$.

3. Электроемкость. Конденсаторы

423. $R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ *м* $= 9$ млн. *км*.

424. $S = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = 1{,}13 \cdot 10^8$ *м*^{2}. Следовательно, $a = \sqrt{S} = 1{,}06 \times \times 10^4$ *м* $= 10{,}6$ *км*.

425. Так как $\varphi_1 = \frac{Q}{C_1}$ и $\varphi_2 = -\frac{Q}{C_2}$, то

$$U = \varphi_1 - \varphi_1 = Q\frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

426. Пусть заряд средней пластины равен $+Q$. Тогда заряд верхней пластины будет равен $-\frac{Q}{2}$. Поле между этими пластинами есть результат суперпозиции трех полей: поля средней пластины с напряженностью $\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ и полей верхней и нижней пластин, которые взаимно уничтожаются (в пространстве между пластинами). Следовательно, $U = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$ и

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d}.$$

427. До соединения:

$$Q_1 = C_1\varphi_1, \quad Q_2 = C_2\varphi_2, \quad Q_1 + Q_2 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2.$$

После соединения:

$$Q_1' = C_1\varphi, \quad Q_2' = C_2\varphi, \quad Q_1' + Q_2' = (C_1 + C_2)\varphi,$$

где φ — искомый потенциал, а Q_1' и Q_2' — конечные заряды проводников. Учитывая, что $Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$, получаем:

$$\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}.$$

428. Так как $C = \frac{Q}{\varphi}$, то $C_1 = \frac{Q}{\varphi_1}$ и $C_2 = \frac{Q}{\varphi_2}$. Подставив эти выражения в равенство, полученное при решении предыдущей задачи, найдем:

$$\varphi = \frac{\frac{Q}{\varphi_1}\varphi_1 + \frac{Q}{\varphi_2}\varphi_2}{\frac{Q}{\varphi_1} + \frac{Q}{\varphi_2}} = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{100} = 48\ (в).$$

429. До соединения:

$$W_0 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} + \frac{C_2\varphi_2^2}{2}.$$

После соединения:

$$\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$$

(см. формулу, полученную при решении задачи 427), и, следовательно,

$$W = \frac{C_1\varphi^2}{2} + \frac{C_2\varphi^2}{2} = \frac{(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Искомое количество тепла равно разности

$$W_0 - W = \frac{C_1C_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 12 \cdot 10^{-5}\ \text{дж}.$$

430. Пусть емкость каждого шара равна C. Тогда

$$\frac{C\varphi_1^2}{2} = 0{,}0016\ \text{дж}, \quad \frac{C\varphi_2^2}{2} = 0{,}0036\ \text{дж},$$

а энергия шаров после соединения:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} + \frac{C\varphi^2}{2} = C\varphi^2 = C\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2.$$

Разрешив два первых равенства относительно φ_1 и φ_2 и подставив полученные выражения в последнее равенство, найдем: $W = 0{,}005$ *дж*. Следовательно, искомое количество тепла равно

$$0{,}0016\ \text{дж} + 0{,}0036\ \text{дж} - 0{,}005\ \text{дж} = 0{,}0002\ \text{дж}.$$

431. Когда расстояние между обкладками увеличивается в два раза, емкость конденсатора становится вдвое меньшей, а разность потенциалов — вдвое большей (так как заряд остается неизменным). Следовательно,

$$A = W - W_0 = \frac{\frac{C}{2}(2U)^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2}.$$

432. При удалении пластинки емкость конденсатора уменьшается в ε раз. Следовательно,

$$A = W - W_0 = \frac{Q^2}{2\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{(\varepsilon - 1)Q^2}{2C}.$$

433. Напряженность поля между обкладками равна $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$. Следовательно,

$$U = Ed = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S},$$

и так как $\frac{\varepsilon_0 S}{d} = C$, то $U = \frac{Q}{2C}$.

434. Сила, действующая на одну из пластин, равна $F = QE$, где E — напряженность поля другой пластины. Учитывая, что $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$, получаем:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Так как, увеличивая расстояние между пластинами, мы не изменяем Q и S, то сила F остается прежней.

435. $Q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$. Подставив это выражение в формулу, полученную при решении предыдущей задачи, будем иметь:

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Так как $U = \text{const}$, а d увеличивается в три раза, то F уменьшится в девять раз.

436. При удалении пластинки емкость конденсатора уменьшается в ε раз. Следовательно, искомый заряд будет равен

$$Q - Q' = CU - \frac{C}{\varepsilon} U = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} CU = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q.$$

4. Конденсаторные цепи

437. 1) Так как конденсаторы C_1, C_2 соединены параллельно, то их общая емкость равна $C_{12} = C_1 + C_2$. Точно так же емкость конденсаторов C_3 и C_4 равна

$$C_{34} = C_3 + C_4.$$

Так как группа C_1, C_2 и группа C_3, C_4 соединены последовательно, то

$$C = \frac{C_{12} C_{34}}{C_{12} + C_{34}} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

2) Конденсаторы C_1, C_3 соединены последовательно, поэтому

$$C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}.$$

Аналогично

$$C_{24} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}.$$

Так как группа C_1, C_3 и группа C_2, C_4 соединены параллельно, то

$$C = C_{13} + C_{24} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}.$$

438. Конденсаторы соединены параллельно, поэтому их общая емкость $C = C_1 + C_2$. Так как соединялись одноименные полюсы, то искомая разность потенциалов равна

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2},$$

где Q_1 и Q_2 — заряды конденсаторов до соединения. Учитывая, что $Q_1 = C_1U_1$ и $Q_2 = C_2U_2$, получаем:

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 260 \text{ в}.$$

439. Так как $Q = Q_1 - Q_2$, то

$$U = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} = 100 \text{ в}.$$

440. До соединения:

$$W = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = 0{,}175 \text{ дж}.$$

После соединения:

$$W' = \frac{CU^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)\,U^2}{2} = 0{,}169 \text{ дж}.$$

Следовательно, искомое количество тепла равно $W - W' = 0{,}006$ *дж*.

441. Так как э.д.с. источника направлена вправо, а поле между обкладками конденсатора направлено влево, то $\varphi_B > \varphi_A$. Поэтому

$$Q = C\,(\varphi_B - \varphi_A - E),$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{C} + E = 5 \text{ в}.$$

442. Так как $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$, то $C = 10$ *мкф*.

Следовательно,

$$Q = C\,(\varphi_A - \varphi_B + E_1 - E_2) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ к},$$

где Q — заряд каждого конденсатора. Отсюда находим:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 1 \text{ в}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{2}{3} \text{ в}, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{1}{3} \text{ в}.$$

443. $Q_1 = C_1\,(E_1 + U)$, $Q_2 = C_2\,(E_2 + U)$.

Исключив из этих выражений $U = \varphi_A - \varphi_B$, получим:

$$Q_2 = C_2\left(E_2 - E_1 + \frac{Q_1}{C_1}\right) = 4 \cdot 10^{-5} \text{ к}.$$

444. Обкладки, примыкающие к узлу O, имеют заряды

$$Q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi), \quad Q_2 = C_2(\varphi_2 - \varphi), \quad Q_3 = C_3(\varphi_3 - \varphi),$$

где φ — потенциал точки O. Следовательно,

$$C_1(\varphi_1 - \varphi) + C_2(\varphi_2 - \varphi) + C_3(\varphi_3 - \varphi) = 0,$$

откуда

$$\varphi = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

445. Так как цепь замкнута, то $Q = C(E_1 + E_2)$, где C — емкость последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2. Поскольку

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}, \quad \text{то} \quad Q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(E_1 + E_2).$$

446. Емкость батареи конденсаторов (рис. 160) равна C. Следовательно, заряд верхнего конденсатора равен CE. Заряды двух других конденсаторов одинаковы, и так как сумма зарядов, примыкающих к узлу A, равна нулю, то заряд каждого из этих конденсаторов равен $\frac{CE}{2}$.

447. Пусть емкость батареи равна C'. Тогда

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{kC},$$

где $k > 100$. Пренебрегая вторым слагаемым, получим $C' = C$, и, следовательно, $Q = CE$.

448. Так как на участке AE_1B нет емкостей и нет тока, то $\varphi_B - \varphi_A = E_1$. Следовательно,

$$Q_1 = C_1E_1, \quad Q_2 = C_2(E_1 - E_2).$$

449. $\varphi_A - \varphi_B = \frac{Q_1}{C_1}$, поэтому

$$Q_2 = C_2(E + \varphi_A - \varphi_B) = C_2\left(E + \frac{Q_1}{C_1}\right).$$

Так как правые обкладки конденсаторов C_1 и C_2 заряжены отрицательно, то правая обкладка конденсатора C_3 заряжена положительно, причем

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = Q_1 + C_2\left(E + \frac{Q_1}{C_1}\right).$$

Далее из равенства $Q_3 = C_3[E' - (\varphi_A - \varphi_B)]$, где E' — искомая э.д.с., получаем:

$$E' = \varphi_A - \varphi_B + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\left[Q_1 + C_2\left(E + \frac{Q_1}{C_1}\right)\right] = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1C_3}Q_1 + \frac{C_2}{C_3}E.$$

450. Положим $\varphi_A = \varphi_B = 0$. Тогда будем иметь:
$$\varphi_C - \varphi_A = E_1,\ \varphi_D - \varphi_C = E_2,\quad \varphi_C = \varphi_A + E_1 = E_1,\ \varphi_D = \varphi_C + E_2 = E_1 + E_2,$$
и поэтому
$$Q_1 = C_1(\varphi_C - \varphi_A) = C_1E_1,$$
$$Q_2 = C_2(\varphi_D - \varphi_B) = C_2(E_1 + E_2),$$
$$Q_3 = C_3(\varphi_D - \varphi_B - E_3) = C_3(E_1 + E_2 - E_3).$$

451. Пусть $\varphi_A = 0$ и $\varphi_B = \varphi$. Тогда
$$Q_1 = C_1(\varphi - E_1),\ Q_2 = C_2(\varphi - E_2),\ Q_3 = C_3\varphi,$$
и так как $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, то
$$C_1(\varphi - E_1) + C_2(\varphi - E_2) + C_3\varphi_3 = 0,$$
откуда
$$\varphi = \frac{C_1E_1 + C_2E_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$
Подставив это выражение в равенства, определяющие Q_1, Q_2, Q_3, найдем
$$Q_1 = C_1\frac{C_2E_2 - (C_2 + C_3)E_1}{C_1 + C_2 + C_3},$$
$$Q_2 = C_2\frac{C_1E_1 - (C_1 + C_3)E_2}{C_1 + C_2 + C_3},$$
$$Q_3 = C_3\frac{C_1E_1 + C_2E_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

452. Пусть $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_D = 0$ и $\varphi_K = \varphi$. Тогда $\varphi_L = \varphi_K + E_2 = \varphi + E_2$.

Далее получим:
$$Q_1 = C[E_1 - (\varphi_K - \varphi_A)] = C(E_1 - \varphi),$$
$$Q_2 = C(\varphi_K - \varphi_A) = C\varphi,$$
$$Q_3 = C(\varphi_L - \varphi_B) = C(\varphi + E_2),$$
$$Q_4 = C(\varphi_L - \varphi_B + E_3) = C(\varphi + E_2 + E_3).$$
Так как точки A, B, D можно объединить в один узел, к которому примыкает левая обкладка конденсатора *1* и нижние обкладки конденсаторов *2*, *3*, *4*, то
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4.$$
Следовательно,
$$C(E_1 - \varphi) = C\varphi + C(\varphi + E_2) + C(\varphi + E_2 + E_3),$$
откуда
$$\varphi = \frac{E_1 - 2E_2 - E_3}{4}.$$

Подставив это выражение в равенства, определяющие заряды конденсаторов, найдем:

$$Q_1 = C\,\frac{3E_1+2E_2+E_3}{4}, \quad Q_2 = C\,\frac{E_1-2E_2-E_3}{4},$$

$$Q_3 = C\,\frac{E_1+2E_2-E_3}{4}, \quad Q_4 = C\,\frac{E_1+2E_2+3E_3}{4}.$$

453. Пусть $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_D = \varphi_F = 0$ и $\varphi_K = \varphi_L = \varphi_M = U$. Потенциал точки N обозначим через x, а точки P — через y и будем считать (для определенности), что $U \geqslant x \geqslant y \geqslant 0$. Тогда

$$Q_1 = C\,(U-y), \quad Q_2 = C\,(U-x), \quad Q_3 = C\,(x-y),$$
$$Q_4 = CU, \quad Q_5 = Cx, \quad Q_6 = Cy,$$

и так как $Q_2 = Q_3 + Q_5, \quad Q_1 + Q_3 = Q_6$, то

$$\left.\begin{aligned} C\,(U-x) &= C\,(x-y) + Cx, \\ C\,(U-y) + C\,(x-y) &= Cy. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x = y = \dfrac{U}{2}$. Далее находим заряд батареи:

$$Q = Q_4 + Q_5 + Q_6 = CU + C\frac{U}{2} + C\frac{U}{2} = 2CU$$

и ее емкость: $C_0 = \dfrac{Q}{U} = 2C.$

454. Пусть $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$ и $\varphi_K = \varphi_L = \varphi$ (так как средний конденсатор не заряжен, то потенциалы точек K и L одинаковы). Тогда

$$Q_1 = C\,(U-\varphi), \quad Q_2 = 2C\varphi,$$
$$Q_3 = 3C\,(U-\varphi), \quad Q_4 = C'\varphi,$$

где C' — искомая емкость. Но средний конденсатор не заряжен, поэтому $Q_1 = Q_2$ и $Q_3 = Q_4$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} C\,(U-\varphi) &= 2C\varphi, \\ 3C\,(U-\varphi) &= C'\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $\varphi = \dfrac{U}{3}$, $C' = 6C$.

§ 21. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

1. Закон Ома. Простейшие электрические цепи

455. Так как заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, а его масса равна $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*, то

$$m = \frac{10 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \approx 0{,}0018 \text{ (кг)}.$$

456. $\frac{R}{R_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$, поэтому искомое отношение равно

$$1 + \alpha t \approx 12{,}5.$$

457. Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно и эквивалентны одному сопротивлению

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 2 \text{ ом}.$$

Сопротивления R_{12} и R_3 соединены параллельно и поэтому

$$R = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ (ом)}.$$

458. Представив эту цепь в виде, показанном на рис. 298 и проведя вычисления, получим $R = 3$ *ом*.

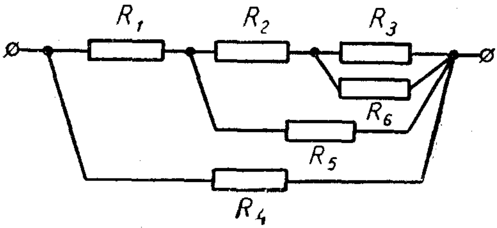


Рис. 298

459. Противоположные вершины, к которым подведено напряжение, обозначим через A и B, а остальные — через C, D, E, F. Из соображений симметрии ясно, что по ребрам CD, DE, EF, FA ток проходить не будет, и поэтому их можно удалить. Тогда останутся четыре параллельно соединенных проводника, каждый из которых имеет сопротивление 2 *ом*. Следовательно, $R = \frac{2}{4} = 0{,}5$ (*ом*).

460. Пусть $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi$ и $\varphi_2 = \varphi_4 = 0$. Тогда ибо $\varphi_4 = 0$

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi}{R}, \quad I_{32} = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi}{R},$$

причем токи I_{12} и I_{32} направлены в противоположные стороны. Поэтому по проводу, соединяющему точки *2* и *4*, протекает ток

$$I_{24} = I_{12} + I_{32} = \frac{2\varphi}{R}.$$

Так как, кроме того,

$$I_{34} = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R} = \frac{\varphi}{R},$$

то ток, протекающий через рассматриваемую цепь, равен

$$I = I_{24} + I_{34} = \frac{3\varphi}{R}.$$

Следовательно, искомое сопротивление равно

$$R_0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{I} = \frac{\varphi}{I} = \frac{\varphi}{3\varphi/R} = \frac{R}{3}.$$

461. Пусть напряжение подведено к вершинам *1* и *2*, причем $\varphi_1 = \varphi$ и $\varphi_2 = 0$. Так как все ребра имеют одинаковые сопротивления, то $\varphi_3 = \varphi/2$ и $\varphi_4 = \varphi/2$, т. е. потенциалы точек *3* и *4* одинаковы. Поэтому ток, протекающий по ребру *3*, *4*, равен нулю, и это ребро можно удалить. Но тогда останутся три параллельно соединенных проводника с сопротивлениями r, $2r$, $2r$. Значит,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}, \quad R = \frac{r}{2}.$$

462. Будем считать, что $\varphi_A > \varphi_B$, и пусть $\varphi_A - \varphi_B = U$. Тогда, согласно условию будем иметь:

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1}, \quad I_2 = \frac{E_2 - U}{r_2}, \quad I_1 + I_2 = I.$$

Решив эти три уравнения с тремя неизвестными, получим:

$$I_1 = 2\ a, \quad I_2 = 1\ a.$$

463. Пусть потенциал точки O равен φ. Тогда получим:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\varphi - \varphi_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{\varphi - \varphi_3}{R_3}, \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

Решив эти четыре уравнения с четырьмя неизвестными, найдем:

$$I_1 = 1a, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 1a.$$

464. Так как $\varphi_A > \varphi_B$ и $\varphi_A - \varphi_B = IR$, то

$$Q = C\,(IR + E_1 - E_2).$$

465. Так как заряжающий ток направлен противоположно э.д.с. аккумулятора, то

$$U - E = Ir,$$

откуда

$$U = E + Ir = 15\text{в}.$$

466. Так как $U = IR = \frac{ER}{R+r}$, а в данном случае

$$U = \frac{15R}{2R+3} = \frac{7{,}5R}{R+1{,}5},$$

то $E = 7{,}5$ *в* и $r = 1{,}5$ *ом.*

467. Так как $U = E + Ir$ (см. решение задачи 465), то

$$U_1 = E + I_1 r, \quad U_2 = E + I_2 r,$$

где

$$U_1 = 20\ \text{в}, \quad U_2 = 19\text{в}, \quad I_1 = 1a, \quad I_2 = 0{,}5\ a.$$

Из этой системы уравнений получаем: $E = 18$ *в*, $r = 2$ *ом.*

468. Так как

$$I=\frac{U}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3},$$

а токи I_1, I_2 обратно пропорциональны сопротивлениям R_1 и R_2, то

$$I_1=I\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{UR_2}{R_1R_2+R_3(R_1+R_2)},$$

$$I_2=I\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{UR_1}{R_1R_2+R_3(R_1+R_2)}.$$

Подставив сюда $R_1=R_2=R_3=R$, получим первоначальные значения токов:

$$I_1=I_2=\frac{1}{3}\frac{U}{R}.$$

Подставив же $R_1=1{,}1R$, $R_2=1{,}3R$, $R_3=R$, найдем:

$$I_1=0{,}339\frac{U}{R},\quad I_2=0{,}287\frac{U}{R}.$$

Следовательно, I_1 увеличится, а I_2 уменьшится.

469. Так как $\frac{E}{R_1}=I_1$, $\frac{E}{R_2}=I_2$, то

$$I=\frac{E}{R_1+R_2}=\frac{E}{\frac{E}{I_1}+\frac{E}{I_2}}=\frac{I_1I_2}{I_1+I_2}=2\,a.$$

470. Из равенства

$$\frac{E}{0{,}8R+r}=1{,}2\frac{E}{R+r}$$

следует, что $r=0{,}2R$. Поэтому

$$\frac{E}{0{,}6R+r}:\frac{E}{R+r}=\frac{R+r}{0{,}6R+r}=\frac{R+0{,}2R}{0{,}6R+0{,}2R}=1{,}5.$$

Следовательно, ток увеличился бы на 50%.

471. Из уравнений

$$\frac{E}{r+R_1}=I_1,\qquad\frac{E}{r+R_2}=I_2,\qquad\frac{E}{r+R_1+R_2}=I_3,$$

где $I_1=3$ a, $I_2=2$ a, $I_3=1{,}5$ a, получаем:

$$R_1=\frac{E}{6}\,(ом),\qquad R_2=\frac{E}{3}\,(ом),\qquad r=\frac{E}{6}\,(ом).$$

Следовательно,

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+r=\frac{5E}{18}\,(ом),\qquad I=\frac{E}{\frac{5E}{18}}=3{,}6\,(a).$$

472. Так как $R_{CD}=0$, то $\varphi_C=\varphi_D$, и поэтому точки C и D можно совместить (рис. 299). Далее получим:

$$R_{AC}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}=1{,}5\,ом,\ R_{CB}=\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}=2{,}1\,ом,\quad R=1{,}5\,ом+$$
$$+2{,}1\,ом=3{,}6\,ом,$$

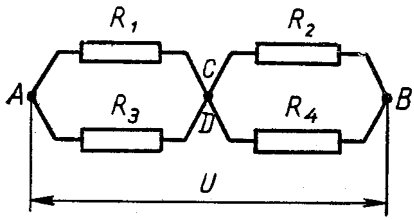


Рис. 299

$$I=\frac{U}{R}=\frac{36}{3{,}6}=10\,(a),\quad \varphi_A-\varphi_C=IR_{AC}=10a\cdot 1{,}5\,ом=15\,в,$$
$$\varphi_C-\varphi_B=36\,в-15\,в=21\,в,$$
$$I_1=\frac{\varphi_A-\varphi_C}{R_1}=\frac{15}{2}=7{,}5(a),\quad I_2=\frac{\varphi_C-\varphi_B}{R_2}=\frac{21}{3}=7\,(a).$$

Теперь, возвращаясь к рис. 179, видим, что

$$I_{CD}=I_1-I_2=7{,}5\ a-7\ a=0{,}5\ a.$$

473. Пусть $\varphi_A=\varphi$ и $\varphi_B=0$. Так как на участке CD тока нет, то $I_2=\dfrac{\varphi}{R_1+R_2}$ и $I_4=\dfrac{\varphi}{R_3+R_4}$. Следовательно,

$$\varphi_C=\varphi_C-\varphi_B=I_2R_2=\frac{\varphi R_2}{R_1+R_2},\quad \varphi_D=\varphi_D-\varphi_B=I_4R_4=\frac{\varphi R_4}{R_3+R_4},$$

Но так как $I_{CD}=0$, то $\varphi_C=\varphi_D$, т. е.

$$\frac{\varphi R_2}{R_1+R_2}=\frac{\varphi R_4}{R_3+R_4},$$

откуда

$$R_4=\frac{R_2R_3}{R_1}=6\,ом.$$

474. Пусть $\varphi_A=30\,в$ и $\varphi_B=0$. Тогда

$$\varphi_C=I_2R_2=20\,в,\quad I_1=\frac{\varphi_A-\varphi_C}{R_1}=5\,a,\quad I_{CD}=I_1-I_2=1\,a,$$

$$\varphi_D = \varphi_C - I_{CD} R = (20 - R)\, \text{в},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_D}{R_3} = \frac{10 + R}{20}\, (a), \quad I_4 = \frac{\varphi_D - \varphi_B}{R_4} = \frac{20 - R}{5}\, (a).$$

Но так как $I_3 + I_{CD} = I_4$, то

$$\frac{10 + R}{20} + 1 = \frac{20 - R}{5},$$

откуда $R = 10$ *ом*.

475. Левый и правый контуры этой цепи по существу независимы. Поэтому $I_1 = \frac{E_1}{R_1}$, $I_2 = \frac{E_2}{R_2}$.

476. Так как $I_{AB} = 0$, то $\varphi_A = \varphi_B$. Поэтому $I_1 = \frac{E_1}{R_1}$, $I_2 = \frac{E_2}{R_2}$ и, кроме того, $I_1 = I_2$. Следовательно,

$$\frac{E_1}{R_1} = \frac{E_2}{R_2}, \quad R_2 = R_1 \frac{E_2}{E_1}.$$

477. Пусть $\varphi_A = E$, $\varphi_B = 0$. Рассматривая токи на участках ACB и ADB, получим:

$$\varphi_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 70\, \text{в}, \quad \varphi_D = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E = 60\, \text{в}.$$

Следовательно, $E' = \varphi_C - \varphi_D = 10$ *в*.

2. Соединение источников э. д. с.

478. $I = \frac{nE}{R + nr}$, где n — число батареек, а R — внешнее сопротивление. Из этого выражения видно, что

$$I < \frac{nE}{nr} = \frac{E}{r}.$$

Следовательно, получить сколь угодно большой ток нельзя.

479. Согласно условию

$$\frac{E + E'n}{R + r + r'n} = I,$$

где r — внутреннее сопротивление аккумулятора, r' — гальванического элемента, а $E = 10$ *в*, $E' = 1$ *в*, $R = 6$ *ом* и $I = 1a$. Так как это равенство имеет место при любом n, то, подставив заданные числовые значения, придем к выводу, что

$$10 = 6 + r, \quad 1 = r',$$

т. е. $r = 4$ *ом*, $r' = 1$ *ом*.

480. $E' = E_1 + E_2 - E_3 = 3$ *в*, $r = r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 = 21$ *ом*.

481. Сопротивление $R = 5$ *ом* можно прибавить к внутреннему сопротивлению первого источника. Тогда получим:

$$r_1 = 1 ом + 5 ом = 6 ом, \quad r_2 = 3 \ ом, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 2 \ ом,$$

$$\frac{E}{r} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}, \quad \frac{E}{2} = \frac{12}{6} + \frac{30}{3}, \quad E = 24 \ в.$$

482. Как и раньше, $r = 2$ *ом*. Далее, так как э.д.с. источников направлены в противоположные стороны, то первую из них следует считать положительной, а вторую — отрицательной. Поэтому

$$\frac{E}{2} = \frac{12}{6} - \frac{30}{3}, \quad E = -16 \ в.$$

Отрицательный знак полученной э.д.с. показывает, что она направлена так же, как э.д.с. E_2, т. е. справа налево. Значит, положительный полюс рассматриваемой батареи находится в точке A, а отрицательный — в точке B.

483. Э.д.с. E_2 и E_3 будем считать положительными, а э.д.с. E_1 — отрицательной. Тогда получим:

$$r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}5 \ ом, \quad \frac{E_{12}}{0{,}5} = -\frac{10}{1} + \frac{20}{1}, \quad E_{12} = 5 \ в.$$

$$E = E_{12} + E_3 = 35 \ в, \quad r = r_{12} + r_3 = 1{,}5 \ ом.$$

484. $$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 \cdot 0}{r_1 + 0} = 0.$$

Далее, $$\frac{E}{r} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

$$E = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\left(\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\right) = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Подставив сюда $r_2 = 0$, получим $E = E_2$.

485. Шунт можно рассматривать как источник, э. д. с. которого равна нулю, а внутреннее сопротивление равно R. Поэтому

$$r' = \frac{Rr}{R + r},$$

$$\frac{E'}{r'} = \frac{E}{r} + \frac{0}{R}, \quad E' = E\frac{r'}{r} = E\frac{R}{R + r}.$$

486. Так как ток через внешнее сопротивление равен нулю, э.д.с. батареи также должна равняться нулю. Учитывая, что $E = E_{12} + E_3$, где

$$E_{12} = r_{12}\left(-\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\right) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\left(-\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\right),$$

получаем:

$$\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\left(-\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\right) + E_3 = 0,$$

или

$$\frac{1\cdot 1}{1+1}\left(-\frac{E_1}{1}+\frac{10}{1}\right)+15=0,$$

откуда $E_1 = 40$ *в*.

487. Добавив сопротивление реостата к внутреннему сопротивлению первого источника и пользуясь формулами

$$\frac{1}{r_{12}}=\frac{1}{r_1+r}+\frac{1}{r_2},\quad \frac{E_{12}}{r_{12}}=\frac{E_1}{r_1+r}+\frac{E_2}{r_2},$$

найдем r_{12} и E_{12}, а затем по формуле

$$I=\frac{E_{12}}{R+r_{12}}$$

ток I. В результате при данных числовых значениях r_1, r_2, R получим:

$$I=\frac{E_1+E_2+E_2 r}{21+11r}.$$

Но ток I равен 1*а* при любом r. Следовательно,

$$E_1+E_2=21\text{в},\quad E_2=11\text{в},$$

т. е. $E_1 = 10$ *в*, $E_2 = 11$ *в*.

488. Определив по известным формулам внутреннее сопротивление и э.д.с. двух параллельно соединенных источников, получим:

$$r=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2},\quad E=\frac{E_1 r_2+E_2 r_1}{r_1+r_2}.$$

Поэтому ток, протекающий во внешней цепи этих источников, равен

$$I=\frac{E}{R+r}=\frac{E_1 r_2+E_2 r_1}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}.$$

В соответствии с условием задачи будем иметь:

$$\frac{15}{R+r_1}=1,\quad \frac{15+10}{R+r_1+r_2}=1,\quad \frac{15r_2+10r_1}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}=1.$$

Решив эти три уравнения с тремя неизвестными, найдем: $r_1 = 5$ *ом*, $r_2 = 10$ *ом*, $R = 10$ *ом*.

489. Так как источники соединены последовательно, то

$$I=\frac{E_1+E_2}{R_1+R_2}.$$

490. Так как источники соединены параллельно, то

$$r=\frac{3\cdot 6}{3+6}=2\ (\text{ом}),\quad \frac{E}{2}=\frac{15}{3}+\frac{30}{6},\ E=20\ \text{в},$$

$$I_{AB} = \frac{E}{R+r} = \frac{20}{8+2} = 2\,(a).$$

Далее, $\varphi_B - \varphi_A = I_{AB} R = 2a \cdot 8\,ом = 16\,в$, и поэтому

$$I_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_1}{r_1} = \frac{16-15}{3} = \frac{1}{3}\,(a), \quad I_2 = \frac{E_2 - (\varphi_B - \varphi_A)}{r_2} = \frac{30-16}{6} = \frac{7}{3}\,(a).$$

(Токи I_{AB} и I_1 направлены от B к A, а ток I_2 — от A к B.)

491. При решении задачи 483 было найдено, что э.д.с. батареи $E = 35\,в$, а внутреннее сопротивление $r = 1{,}5\,ом$. Следовательно,

$$I = I_3 = \frac{E}{R+r} = \frac{35}{2+1{,}5} = 10\,(a).$$

Далее из равенства

$$I = \frac{E_3 + \varphi_B - \varphi_A}{R + r_3}$$

находим:

$$\varphi_B - \varphi_A = I\,(R + r_3) - E_3 = 10\,(2+1) - 30 = 0.$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1} = \frac{10}{1} = 10\,(a), \quad I_2 = \frac{E_2}{r_2} = \frac{20}{1} = 20(a).$$

492. Так как источники E_1 и E_2 соединены параллельно, то

$$r_{12} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2\ ом,\ \frac{E_{12}}{2} = \frac{30}{3} + \frac{60}{6},\ E_{12} = 40\ в.$$

Так как источники E_3 и E_{12} соединены последовательно, то

$$I_3 = \frac{180-40}{12+2} = 10(a)$$

и этот ток направлен от A к B. Аналогично найдем, что ток $I_1 = 10\,a$ и направлен от B к A. Следовательно, $I_2 = 0$.

493. При решении задачи 483 было найдено, что э.д.с. батареи $E = 35\ в$. Следовательно, $Q = CE = 200 \cdot 10^{-6}\,ф \cdot 35\,в = 0{,}007\ к$.

3. Метод узловых потенциалов

494. Токи, текущие через источники, будем считать направленными от A к B, а ток, текущий через сопротивление R, — от B к A. Потенциал узла A будем считать равным нулю, а потенциал узла B — равным φ. Тогда получим:

$$I_1 = \frac{E_1 - \varphi}{r_1}, \quad I_2 = \frac{E_2 - \varphi}{r_2}, \quad I_{AB} = \frac{\varphi}{R},$$

где $E_1 = 15$ *в*, $E_2 = 30$ *в*, $r_1 = 3$ *ом*, $r_2 = 6$ *ом*, $R = 8$ *ом*. Далее, так как токи I_1, I_2 «втекают» в узел B, а ток I_{AB} «вытекает» из этого узла, то

$$\frac{15-\varphi}{3}+\frac{30-\varphi}{6}=\frac{\varphi}{8}.$$

Решив это уравнение, найдем: $\varphi = 16$ *в*. Следовательно,

$$I_1=\frac{15-16}{3}=-\frac{1}{3}\,(a),\quad I_2=\frac{30-16}{6}=\frac{7}{3}\,(a),$$

$$I_{AB}=\frac{16}{8}=2\,(a).$$

Так как ток I_1 получился отрицательным, то он направлен не от A к B (как мы предполагали), а от B к A.

495. Будем считать, что ток I_1 направлен от A к C, ток I_2 — от C к B, ток I_3 — от A к D, ток I_4 — от D к B, ток I_5 — от C к D. Потенциал точки B будем считать равным нулю, и тогда потенциал точки A будет $\varphi_A = E = 22$ *в*. Далее получим:

$$I_1=\frac{\varphi_A-\varphi_C}{R_1},\quad I_2=\frac{\varphi_C}{R_2},\quad I_3=\frac{\varphi_A-\varphi_D}{R_3},\quad I_4=\frac{\varphi_D}{R_4},\quad I_5=\frac{\varphi_C-\varphi_D}{R_5}.$$

Но ток I_1 «втекает» в узел C, а токи I_2, I_5 «вытекают» из этого узла. Следовательно,

$$\frac{22-\varphi_C}{1}=\frac{\varphi_C}{2}+\frac{\varphi_C-\varphi_D}{2}.$$

(Здесь уже подставлены числовые значения для φ_A и сопротивлений). Аналогично, токи I_3, I_5 «втекают» в узел D, а ток I_4 «вытекает» из этого узла. Поэтому

$$\frac{22-\varphi_D}{2}+\frac{\varphi_C-\varphi_D}{2}=\frac{\varphi_D}{2}.$$

Решив полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, найдем: $\varphi_C = 14$ *в*, $\varphi_D = 12$ *в*. Подставив эти значения в выражения для токов, получим:

$$I_1 = 8a,\ I_2 = 7a,\ I_3 = 5a,\ I_4 = 6a,\ I_5 = 1a.$$

Поскольку все токи положительны, то они направлены так, как мы предполагали.

496. Будем считать, что токи направлены так, как показано на рис. 193. Пусть $\varphi_C = 0$ и $\varphi_A = U = 14$ *в*. Тогда

$$I_1=\frac{14-\varphi_B}{1}\,(a),\quad I_2=\frac{\varphi_B}{1}\,(a),\quad I_3=\frac{\varphi_B-\varphi_D}{1}\,(a),\quad I_4=\frac{\varphi_D}{1}\,(a),$$

и так как $I_1 = I_2 + I_3$ и $2I_3 = I_4$, то

$$14-\varphi_B=\varphi_B+(\varphi_B-\varphi_D),$$
$$2(\varphi_B-\varphi_D)=\varphi_D.$$

Из этих уравнений найдем: $\varphi_B = 6\,в$, $\varphi_D = 4\,в$. Подставив эти значения в выражения для токов, получим:

$$I_1 = 8\,a,\ I_2 = 6\,a,\ I_3 = 2\,a,\ I_4 = 4\,a.$$

(Так как цепь симметрична, то эту задачу можно было решить проще — совмещая точки B и F.)

497. Предполагаемые направления токов показаны на рис. 194. Пусть $\varphi_C = 0$. Тогда $\varphi_A = E_2 = 39\,в$. Далее получим:

$$I_1 = \frac{39 - \varphi_B}{20}\,(a),\quad I_2 = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{10}\,(a),\quad I_3 = \frac{\varphi_B}{10}\,(a),\quad I_4 = -\frac{\varphi_D}{10}\,(a),\quad I_5 = \frac{65 + \varphi_D - 39}{10}\,(a).$$

Учтя, что $I_1 = I_2 + I_3$ и $I_2 + I_4 = I_5$, будем иметь:

$$\frac{39 - \varphi_B}{20} = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{10} + \frac{\varphi_B}{10},\quad \frac{\varphi_B - \varphi_D}{10} - \frac{\varphi_D}{10} = \frac{26 + \varphi_D}{10}.$$

Решив эту систему, найдем: $\varphi_B = 5\,в$, $\varphi_D = -7\,в$. Подставив эти значения в выражения для токов, получим:

$$I_1 = 1{,}7\,a,\ I_2 = 1{,}2\,a,\ I_3 = 0{,}5\,a,\ I_4 = 0{,}7\,a,\ I_5 = 1{,}9\,a.$$

Ток, протекающий через источник E_2, очевидно, равен $I_4 - I_3 = 0{,}7a - 0{,}5\,a = 0{,}2\,a$ (и направлен от A к C).

498. Пусть $\varphi_B = 0$. Тогда $\varphi_A = E_1 = 10\,в$. Далее, пусть $\varphi_G = x$, $\varphi_D = y$; $\varphi_K = \varphi_L = z$. Тогда получим:

$$I_1 = 30 + 10 - x,\ I_2 = x - y;\quad I_3 = y,$$
$$I_4 = x - z,\ I_5 = y - z,\ I_6 = 10 - z,\ I_7 = z.$$

Учтя, что $I_1 = I_2 + I_4$, $I_2 = I_3 + I_5$, $I_4 + I_6 = I_5 + I_7$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &40 - x = x - y + x - z,\\ &x - y = y + y - z,\\ &x - z + 10 - z = y - z + z.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем: $x = 20\,в$, $y = 10\,в$, $z = 10\,в$. Подставив эти значения в выражения для токов, найдем:

$$I_1 = 20\,a,\ I_2 = I_3 = I_4 = I_7 = 10\,a,\ I_5 = I_6 = 0.$$

4. Работа и мощность тока

499. Так как $W = UIt = 10^9 \cdot 20\,000 \cdot 0{,}001 = 2 \cdot 10^{10}$ ($вт \cdot сек$), то искомая стоимость равна

$$\frac{2 \cdot 10^{10}}{3600 \cdot 1000} \cdot 0{,}04 \approx 222\ (руб).$$

500. Одна молния расходует энергию $2 \cdot 10^{10}$ *вт · сек* (см. решение предыдущей задачи), поэтому

$$W = \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 100 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365}{3600 \cdot 1000} \approx 17{,}5 \cdot 10^{12}\,(\textit{квт} \cdot \textit{ч}).$$

Это в три с половиной раза больше годичной выработки электроэнергии.

501. Из равенства $0{,}5\ mgh = Nt$ получаем:

$$m = \frac{Nt}{0{,}5gh} \approx 2200\,\textit{кг} = 2{,}2\ \textit{т}.$$

502. Так как $N = \frac{U^2}{R}$, то лампа большей мощности имеет меньшее сопротивление. А так как ток, протекающий через последовательно соединенные лампы, одинаков, то она будет гореть менее ярко.

503. Неверно, так как при $U = 127$ *в* нить лампы будет иметь меньшую температуру и, следовательно, меньшее сопротивление. Поэтому отношение $\frac{U^2}{R}$ уменьшится меньше, чем в три раза.

504. Из пяти ламп заменена только одна, и поэтому ток, протекающий через лампы, изменится мало. А так как сопротивление новой лампы заметно меньше сопротивления старой, то она будет гореть менее ярко.

505. Так как лампа рассчитана на ток $I = \frac{60}{127} = 0{,}472$ (a) и имеет сопротивление $R = \frac{127^2}{60} = 269$ $(\textit{ом})$, то

$$\frac{4{,}5\,n}{269 + 3{,}5n} = 0{,}472,$$

откуда $n = 45$.

506. В этом случае $I = \frac{250}{127} \approx 2\,(a)$, $R = \frac{127^2}{250} \approx 65\,(\textit{ом})$, и, следовательно,

$$\frac{4{,}5\ n}{65 + 3{,}5\ n} = 2.$$

Так как это уравнение не имеет положительных корней, то поставленное требование невыполнимо.

507. Так как $r = 0$, то $N = EI = \frac{E^2}{R}$. Далее из равенств $N_1 = \frac{E^2}{R_1}$ и $N_2 = \frac{E^2}{R_2}$ получаем:

$$N = \frac{E^2}{R_1 + R_2} = \frac{E^2}{\frac{E^2}{N_1} + \frac{E^2}{N_2}} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} = 20\ \textit{вт}.$$

508. Так как $r = 0$, то $N = \frac{E^2}{R}$. Далее,

$$\frac{E^2}{R_1 + R_2} = 2 \text{ вт}, \quad \frac{E^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = 9 \text{ вт}.$$

Откуда $R_1 = \frac{E^2}{3}$ (*ом*), $R_2 = \frac{E^2}{6}$ (*ом*). Следовательно, $N_1 = \frac{E^2}{R_1} = 3$ *вт*, $N_2 = \frac{E^2}{R_2} = 6$ *вт*.

509. Так как $Q = I^2Rt = \frac{E^2Rt}{(R+r)^2}$, то

$$\frac{E^2 10t}{(10+r)^2} = \frac{E^2 40t}{(40+r)^2},$$

откуда $r = 20$ *ом*.

510. Так как $\frac{E_1^2}{R} = 10$ *вт* и $\frac{E_2^2}{R} = 40$ *вт*, то

$$N = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{10R} + \sqrt{40R}\right)^2}{R} = 90 \text{ вт}.$$

511. Согласно условию будем иметь:

$$\left(\frac{E}{\frac{r}{2} + R}\right)^2 R = 80 \text{ вт}, \quad \left(\frac{2E}{2r + R}\right)^2 R = 80 \text{ вт},$$

где E — э.д.с. аккумулятора, r — его внутреннее сопротивление и R — сопротивление внешней цепи. Из этих равенств следует, что $r = R$ и $\frac{E^2}{R} = 180$ *вт*. Поэтому искомая мощность

$$N = \left(\frac{E}{r+R}\right)^2 R = \left(\frac{E}{R+R}\right)^2 R = \frac{E^2}{4R} = \frac{180}{4} = 45 \text{ (вт)}.$$

512. Так как $N = I^2R = \frac{E^2R}{(R+r)^2} = \frac{400R}{(R+5)^2}$, то

$$\frac{400R}{(R+5)^2} = 15,$$

откуда $R = 15$ *ом* или $R = 5/3$ *ом*. Следовательно, мощность 15 *вт* возможна. Если же $N = 25$ *вт*, то

$$\frac{400R}{(R+5)^2} = 25,$$

и, решив это квадратное уравнение, убеждаемся в том, что его корни комплексны. Значит, мощность 25 *вт* невозможна.

513. Пусть внешнее сопротивление равно R, а мощность, развиваемая на нем, равна N. Тогда

$$\frac{E^2R}{(R+r)^2}=N,$$

откуда

$$R=\frac{E^2-2Nr\pm E\sqrt{E^2-4Nr}}{2N}.$$

Если $E^2-4Nr\geqslant 0$, то сопротивление R, обеспечивающее заданную мощность N, существует, а если $E^2-4Nr<0$, то такого сопротивления нет. Значит, возможна любая мощность, удовлетворяющая условию $E^2-4Nr\geqslant 0$, откуда $N_{\max}=\frac{E^2}{4r}$.

(Подставив это выражение в равенство, определяющее R, видим, что максимальная мощность достигается при $R=r$.)

514. Согласно условию

$$\frac{E^2}{4r_1}=20\ вт,\ \frac{E^2}{4r_2}=30\ вт.$$

При параллельном соединении будем иметь:

$$N_{\max}=\frac{E^2}{\dfrac{4r_1r_2}{r_1+r_2}}=\frac{E^2}{4r_1}+\frac{E^2}{4r_2}=50\ вт.$$

515. Из равенств $\frac{E^2}{4r_1}=20\ вт$ и $\frac{E^2}{4r_2}=30\ вт$ получаем:

$$N_{\max}=\frac{E^2}{4(r_1+r_2)}=\frac{E^2}{\dfrac{E^2}{20}+\dfrac{E^2}{30}}=12\ (вт).$$

516. Мощность, развиваемая источником э.д.с., равна EI, а мощность, выделяющаяся внутри этого источника, равна I^2r. Следовательно, мощность, отдаваемая во внешнюю цепь,

$$N=EI-I^2r.$$

Правая часть этого равенства представляет квадратичный полином относительно I. Определив обычными методами его максимальное значение, получим:

$$N_{\max}=\frac{E^2}{4r}.$$

Следовательно, $N\leqslant E^2/4r$.

517. Полезная мощность равна I^2R, а полная равна $EI=I^2(R+r)$. Следовательно,

$$\eta=\frac{I^2R}{I^2(R+r)}=\frac{R}{R+r}.$$

518. Так как $\frac{R}{R+r}=0{,}5$, то $r=R$, и поэтому

$$\eta=\frac{R\cdot100\%}{R+0{,}5r}=\frac{R\cdot100\%}{R+0{,}5R}\approx67\ \%.$$

519. $\eta=\frac{R\cdot100\%}{R+2r}=\frac{R\cdot100\%}{R+2R}\approx33\ \%.$

520. Из равенств

$$\frac{R}{R+r_1}=0{,}5,\quad \frac{R}{R+r_2}=0{,}6,$$

получаем: $r_1=R$, $r_2=\frac{2R}{3}$. Следовательно,

$$\eta=\frac{R\cdot100\%}{R+r_1+r_2}=\frac{R\cdot100\%}{R+R+\frac{2R}{3}}=37{,}5\ \%.$$

521. Так как

$$r=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}=0{,}5\ \textit{ом},\qquad E=r\left(\frac{E_1}{r_1}+\frac{E_2}{r_2}\right)=8\ \textit{в},$$

то

$$I=\frac{E}{R+r}=8\ a,\quad I_1=\frac{E_1-IR}{r_1}=6\ a,\quad I_2=\frac{E_2-IR}{r_2}=2\ a,$$

$$N_1=I_1^2r_1=36\ \textit{вт},\quad N_2=I_2^2r_2=4\ \textit{вт},\ N=N_1+N_2=40\ \textit{вт}.$$

522. При решении предыдущей задачи было найдено, что $I=8\ a$, $r=0{,}5$ *ом*. Следовательно, $I^2r=32$ *вт*, что не совпадает с мощностью $N=40$ *вт*, вычисленной ранее. Это объясняется тем, что мы не имели права пользоваться формулой $N=I^2r$, ибо она относится к участку цепи, содержащему только сопротивления, а не источники э.д.с. (Однако можно доказать, что если участок состоит из нескольких сопротивлений, соединенных с несколькими источниками *последовательно*, то эта формула остается верной.)

523. Передается второй динамо-машине, которая работает в режиме электродвигателя.

5. Электролиз

524. Так как $m=kIt$ и $m=\rho S\delta$, где S — площадь покрытия, а δ — толщина, то

$$t=\frac{\rho S\delta}{kI}=\frac{\rho\delta}{kj},$$

где $j=\frac{I}{S}$ — плотность тока. Подставив числа, получим: $t=14\,800$ *сек* ≈ 4 *ч*.

525. Из решения предыдущей задачи следует, что толщина покрытия увеличивается со скоростью

$$v = \frac{\delta}{t} = \frac{kj}{\rho}.$$

Следовательно,

$$j = \frac{\rho v}{k} \approx 2600\ a/м^2 = 26\ a/дм^2.$$

526. Так как $m = kIt$ и $W = UIt$, то

$$\frac{W}{m} = \frac{U}{k} \approx 3 \cdot 10^7\ дж/кг \approx 8{,}3\ квт \cdot ч/кг.$$

527. Из равенства $m = \frac{A}{Fn} It$ получаем:

$$\frac{A}{n} = \frac{m}{It} F = \frac{503 \cdot 10^{-6}}{1{,}5 \cdot 300} \cdot 9{,}65 \cdot 10^7 = 107{,}9\ (экв^{-1}).$$

Очевидно, это серебро. ($A = 107{,}9$, $n = 1$.)

528. Так как $m = \frac{A}{Fn} It$, то $It = F\frac{m}{A}n$. Если масса равна одному килограмм-атому, то $\frac{m}{A} = 1$ и $It = Fn$. Так как медь в растворе $CuSO_4$ и железо в растворе $FeCl_2$ имеют одинаковую валентность, то произведение It для них одинаково.

529. В этом случае $It = Fn = F$ (см. решение задачи 528). Следовательно, $Q = F = 9{,}65 \cdot 10^7\ к$.

530. Искомый заряд равен $q = \frac{F}{N}$, где N — число Авогадро. Следовательно, $q = \frac{9{,}65 \cdot 10^7}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ (к). (Это заряд электрона.)

§ 22. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКА И МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

531. С силой, равной нулю, так как поле однородно.

532. На стержень действуют сила $F = BIl$ и сила mg (рис. 300). Приравняв нулю сумму их моментов относительно точки O, получим:

$$F \cdot OA \cos\varphi - mgOA \sin\varphi = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{mg} = \frac{BIl}{mg} = \frac{\mu_0 HIl}{mg}.$$

533. Сила, действующая на сторону BC, равна нулю. Сила, действующая на сторону AB, равна

$$F_1 = BI \cdot AB \sin B = BIh,$$

где $h = AB \sin B$ — высота треугольника, опущенная на сторону

BC. Аналогично сила, действующая на сторону AC, равна

$$F_2 = BI\,AC \sin C = BIh = F_1.$$

Силы F_1 и F_2 перпендикулярны плоскости треугольника, направлены в противоположные стороны и приложены в серединах сторон AB и AC. Следовательно, момент образуемой ими пары равен

$$M = BIh\frac{BC}{2}.$$

Учитывая, что $h\frac{BC}{2} = S$, получим: $M = BIS$.

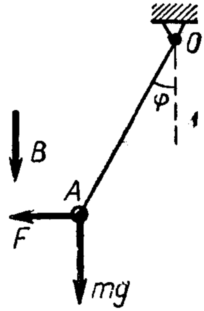


Рис. 300

534. Силы, действующие на верхнюю и нижнюю стороны квадрата, уравновешиваются. Сила, действующая на левую сторону квадрата, направлена влево, а действующая на правую сторону — вправо. Так как первая из этих сил больше второй, то их равнодействующая направлена влево.

535. Сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, поэтому не изменяет ее величину. (Это верно и при движении в неоднородном магнитном поле.) Так как частица остается в плоскости, перпендикулярной полю, то угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$ равен 90°. Поэтому

$$F = Bq\,v \sin\alpha = Bqv,$$

и так как $B = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то сила F тоже остается постоянной. Следовательно, при движении этой частицы сохраняется не только величина ее скорости, но и величина ее ускорения. Но это возможно только при движении по окружности.

536. Плоскость движения электрона перпендикулярна вектору $\vec{B}$, и поэтому $F = Bev$ (см. решение задачи 535). Далее, так как $F = \frac{mv^2}{R}$, то

$$Bev = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$\omega = \frac{v}{R} = B\frac{e}{m}.$$

537. Так как заряд электрона равен заряду протона, то из решения предыдущей задачи получаем:

$$\frac{\omega_e}{\omega_p} = \frac{m_p}{m_e} = 1836.$$

538. Скорость электрона определяется равенством

$$\frac{mv^2}{2} = Ue,$$

а радиус его траектории в магнитном поле — равенством

$$\frac{mv^2}{R} = Bev.$$

Эти уравнения содержат две неизвестные величины — v и e/m. После решения получаем:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2R^2} \approx 1{,}75 \cdot 10^{11}\ \kappa/\kappa г.$$

539. Потому, что в стержне возникает электрическое поле, противодействующее перемещению зарядов. Между концами стержня появляется разность потенциалов, равная и противоположная э.д.с. электромагнитной индукции.

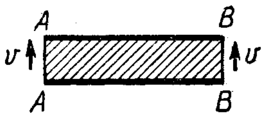


Рис. 301

540. На рис. 301 показан стержень в моменты t и $t + \Delta t$ (магнитное поле $\vec{H}_0$ перпендикулярно плоскости чертежа). Так как площадь, «ометаемая» стержнем за время Δt, равна $AB\, v\Delta t$, то

$$\Delta\Phi = \mu_0 H_0 AB\, v\Delta t \quad \text{и} \quad E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0 H_0 ABv.$$

Следовательно,

$$v = \frac{E_i}{\mu_0 H_0 AB} = 20\,000\ м/сек = 20\ км/сек.$$

541. Точка B, так как на участке BCA, где отсутствует э.д.с., ток идет от точки B к точке A.

542. Магнитный поток через контур равен $\Phi = \mu_0 HS \cos 30°$. Следовательно,

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0 S \cos 30° \frac{\Delta H}{\Delta t}.$$

Подставив числовые данные, получим $E_i \approx 0{,}00014\ в$.

543. В момент, когда рамка расположена вертикально, $\Phi = 0$. Спустя время Δt магнитный поток равен $\Delta\Phi = BS \sin\alpha$, где $\alpha = \omega\Delta t$ — угол поворота рамки. Поэтому искомая э.д.с. равна

$$E_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{BS \sin \omega\Delta t}{\Delta t} = BS\omega.$$

(При вычислении предела можно $\sin\omega\Delta t$ заменить на $\omega\Delta t$.)

544. Так как $E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где $\Delta\Phi = \mu_0 Hav\,\Delta t$, то $E_i = \mu_0 Hav$.

Следовательно,

$$I = \frac{E_i}{R} = \frac{\mu_0 Hav}{R}.$$

545. За время Δt рамка переместится в положение $A'B'C'D'$ (рис. 302). При этом магнитный поток уменьшится на $\Delta\Phi = \Phi_{ABB'A'} - \Phi_{DCC'D'} = \mu_0 H_{AB}\ ABv\Delta t - \mu_0 H_{CD} \times CD\ v\Delta t$.
Учитывая, что

$$H_{AB} = H, \quad H_{CD} = \frac{H}{2}$$

и $AB = CD = a$,

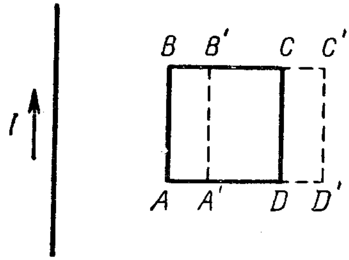


Рис. 302

получим:

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 H}{2} av\,\Delta t.$$

Следовательно,

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0 H a v}{2}.$$

546. На участке S_1 возникает э.д.с.

$$E_1 = \frac{\Delta B}{\Delta t} S_1,$$

а на участке S_2 — э.д.с.

$$E_2 = \frac{\Delta B}{\Delta t} S_2.$$

Так как токи, порождаемые этими э.д.с., направлены в противоположные стороны, то искомая э.д.с. равна

$$E' = E_1 - E_2 = \frac{\Delta B}{\Delta t}(S_1 - S_2).$$

Далее, так как согласно условию $\frac{\Delta B}{\Delta t} S = E$, то $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{E}{S}$.

Следовательно, $E' = E\,\frac{S_1 - S_2}{S}$.

547. Так как $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = E_i = IR$ и при этом $R = 0$, то, как бы ни перемещался магнит, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ будет все время равно нулю. Следовательно, магнитный поток через кольцо будет все время одинаков и, значит, после удаления магнита останется равным Φ. (При удалении магнита в кольце возникает индукционный ток. Магнитное поле этого тока создает поток Φ, который раньше создавался полем постоянного магнита.)

548. Так как $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = IR$, то $\Delta Q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}$, где ΔQ — заряд, проходящий за время изменения потока на $\Delta\Phi$. Из равенства $\Delta Q = \frac{\Delta\Phi}{R}$ следует, что искомый заряд равен

$$Q = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = 10^{-4} к.$$

549. Ток в катушке порождается э.д.с. $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, которой противодействует э.д.с. самоиндукции $L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR,$$

откуда

$$\Delta Q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi - L\Delta I}{R},$$

$$Q = \frac{\Phi - LI}{R} = 25 \cdot 10^{-6} \ к.$$

550. Так как $\Phi = LI$ и $W = \frac{LI^2}{2}$, то

$$I = \frac{2W}{\Phi} = 10 \ а.$$

551. Так как количество тепла, выделившегося в лампе, равно энергии магнитного поля дросселя, то

$$\frac{LI^2}{2} = 1{,}6 \ дж.$$

552. Наибольший ток будет в момент, когда конденсатор полностью разрядится. Так как при этом вся его энергия перейдет в энергию магнитного поля катушки, то

$$\frac{LI^2_{max}}{2} = \frac{CU^2}{2},$$

откуда $I_{max} = U\sqrt{\frac{C}{L}}$.

553. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} + Q,$$

где Q — искомое количество тепла. Подставив сюда $U_0 = 1000 \ в$, $U = 600 \ в$ и заданные значения C, L, I, найдем: $Q = 5{,}6 \ дж$.

554. $E_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = 100 \ в$, $\quad E_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = 60 \ в$.

Считая, что эти э.д.с. направлены по часовой стрелке, получим:

$$\varphi_B - \varphi_A = E_2, \quad I' = \frac{E_1 + \varphi_B - \varphi_A}{R_1}, \quad I'' = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{R_2},$$

где I' и I'' — токи через сопротивления. Зная E_1, E_2, R_1, R_2, найдем: $I' = 1{,}6$ *а*, $I'' = 0{,}3$ *а*. Так как ток I' направлен вправо, а ток I''— вверх, то

$$I_1 = I' = 1{,}6\ a, \quad I_2 = I' + I'' = 1{,}9\ a.$$

555. Катушка L создает э.д.с. самоиндукции $E_i = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Следовательно,

$$\varphi_A - \varphi_B - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = L\frac{\Delta I}{\Delta t} + IR = 0{,}01 \cdot 2 + 2t \cdot 0{,}1 = (0{,}2t + 0{,}02)\ в.$$

556. При решении предыдущей задачи было найдено, что

$$\varphi_A - \varphi_B = L\frac{\Delta I}{\Delta t} + IR.$$

Следовательно, $0{,}1 = 0{,}02 \cdot 3 + I \cdot 0{,}1$, откуда $I = 0{,}4$ *а*.

557. Из равенства $\varphi_A - \varphi_B = L\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$ находим:

$$\varphi_A - \varphi_B = 0{,}01 \cdot 2 = 0{,}02\ (в).$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01\,(a),\ I_3 = I_1 + I_2 = (2t + 0{,}01)\,a.$$

558. Так как

$$L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t} + I_1R = L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t} + I_2R$$

(каждая из этих сумм равна $\varphi_A - \varphi_B$), то

$$0{,}02 \cdot 10 + 0{,}1R = 0{,}005 \cdot 20 + 0{,}2R,$$

откуда $R = 1$ *ом*.

559. Так как $E - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR$ и в первый момент после замыкания $I = 0$, то $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{E}{L} = 10/0{,}01 = 1000$ (*а/сек*).

560. $\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{E - IR}{L} = 400$ *а/сек* (см. решение предыдущей задачи).

561. Для участка BEA будем иметь:

$$E + \varphi_B - \varphi_A - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR.$$

Следовательно,

$$\varphi_B - \varphi_A = L\frac{\Delta I}{\Delta t} + IR - E = -26\ в$$

и, значит, $Q = C(\varphi_A - \varphi_B) = 26 \cdot 10^{-5}$ *к*.

562. Так как $I = \frac{U-E}{R}$ и $\frac{E}{n} = \text{const} = k$, то

$$I = \frac{U-kn}{R},\ I = \frac{100-kn}{2},$$

где k — постоянный для этого двигателя коэффициент. Подставив сюда $I = 10$ *а* и $n = 800$ *об/мин*, получим: $k = 0{,}1$, откуда

$$I = \frac{100-0{,}1n}{2}\ (a).$$

Это соотношение позволяет вычислить I при любом значении n. Так как при отсутствии нагрузки $I = 0$, то искомая скорость $n = 1000$ *об/мин*.

563. Из равенства $I = \frac{100-0{,}1n}{2}\ (a)$, полученного при решении предыдущей задачи, находим: 1) для $n = 600$ *об/мин* $I = 20$ *а*; 2) для $n = 1200$ *об/мин* $I = -10$ *а*. Следовательно, при скорости 1200 *об/мин* этот двигатель становится генератором.

564. Так как $I = \frac{U-E}{R}$ и $\frac{E}{n} = \text{const} = k$, то $I = \frac{U-kn}{R}$. Подставив сюда заданные значения, будем иметь:

$$10 = \frac{120-1000k}{R},\qquad 15 = \frac{120-900k}{R}.$$

Решив эту систему, найдем: $k = 0{,}1$, $R = 2$ *ом*. Если затем в равенство $I = \frac{U-kn}{R}$ подставить $I = 0$, $U = 120$ *в*, $k = 0{,}1$, то получим: $n = 1200$ *об/мин*.

565. $N = UI - I^2R$, где $R = 2$ *ом* (см. решение предыдущей задачи). Следовательно,

$$N_1 = 120 \cdot 10 - 10^2 \cdot 2 = 1000\ (вт),$$
$$N_2 = 120 \cdot 15 - 15^2 \cdot 2 = 1350\ (вт).$$

566. Исключив из равенств

$$U - E = IR,\quad UI - I^2R = N$$

напряжение U, получим: $EI = N$. Следовательно, $E = \frac{N}{I}$.

567. Вращающий момент двигателя пропорционален напряженности магнитного поля индуктора и току в якоре. А так как, изменяя нагрузку двигателя, мы не изменяем магнитного поля индуктора, то $M = kI$, где k — некоторая константа (для данного двигателя при данном напряжении). Следовательно, ток I возрос на 20%, а тепловая мощность I^2R — на 44%.

568. Если $U = \text{const}$, то $M = kI$, где I — ток в якоре (см. решение задачи 567). Но $I = \frac{U - E}{R}$ и $\frac{E}{n} = \text{const} = a$. Следовательно,

$$M = k\frac{U - an}{R} = \frac{kU}{R} - \frac{ka}{R}n = A - Bn,$$

где A и B — некоторые константы (для данного двигателя при данном напряжении). График зависимости $M = f(n)$ изображен на рис. 303.

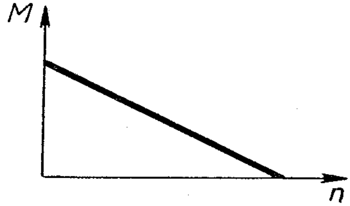


Рис. 303

569. Момент нагрузки равен вращающему моменту двигателя (в установившемся режиме). Следовательно, $M = A - Bn$, где A и B — некоторые константы (см. решение задачи 568). Далее, из условия получаем:

$$0 = A - B \cdot 1000, \quad M = A - B \cdot 700, \qquad 1{,}2\,M = A - Bn,$$

где n — искомая скорость вращения. Разрешив два первых равенства относительно A и B и подставив полученные выражения в третье равенство, найдем: $n = 640$ *об/мин*.

570. Поскольку на одном из параллельных участков цепи (на якоре) действует э.д.с., то приведенное рассуждение неверно. (См. в связи с этим задачи 519, 520.)

571. $N = UI - I^2R$. Подставив сюда заданные значения, получим: $R = 10$ *ом*. После этого, подставив $U = 500$ *в*, $I = 20$ *а* и $R = 10$ *ом*, найдем: $N = 6$ *квт*.

572. Так как $U = 120$ *в* и $R = 20$ *ом*, то

$$N = 120\,I - 20\,I^2.$$

В правой части этого равенства стоит квадратичная функция от I, максимум которой можно найти обычным путем. В результате получим: $N_{\max} = 180$ *вт*.

573. Найдем сначала $N_{\max}$. Так как график функции

$$N = f(I) = UI - I^2R$$

есть парабола, пересекающая ось абсцисс в точках $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{U}{R}$, то $N_{\max}$ достигается при $I = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{U}{2R}$. Следовательно,

$$N_{\max} = U\frac{U}{2R} - \left(\frac{U}{2R}\right)^2 R = \frac{U^2}{4R},$$

и так как мощность, потребляемая этим двигателем, равна

$$N = UI = U\frac{U}{2R} = \frac{U^2}{2R},$$

то к. п. д. $= \frac{N_{\max}}{N} \cdot 100\% = 50\%$.

574. Так как вес груза не изменяется, то не изменится и вращающий момент двигателя. Следовательно, ток останется тем же. (Если бы ток, протекающий через двигатель, стал меньше, то, помимо уменьшения тока в якоре, произошло бы и ослабление магнитного поля индуктора. Каждая из этих причин привела бы к уменьшению вращающего момента.)

575. Так как потребляемая мощность $N = EI$ и в то же время $N = M\omega$, то

$$\omega = \frac{EI}{M} = 80\ \textit{сек}^{-1} \approx 760\ \textit{об/мин}.$$

576. Так как $N = EI$ и $E - U = IR$, то

$$1200 = EI, \quad E - 100 = I \cdot 2.$$

Решив эту систему уравнений, получим: $E = 120$ *в*, $I = 10$ *а*.

577. При работе без нагрузки

$$E - U = IR,\ 100 - 90 = I \cdot 2,\ I = 5\ a,$$

где I — ток в цепи якоря, равный току в цепи индуктора (так как машина не замкнута на внешнее сопротивление). После присоединения внешней цепи (и увеличения угловой скорости) ток в якоре будет

$$I' = I_1 + I_2,$$

где I_1 — ток в цепи индуктора, а I_2 — во внешней цепи. Но так как напряжение осталось неизменным, то

$$I_1 = I = 5\ a, \quad I_2 = \frac{U}{r} = \frac{90}{30} = 3\ (a),\ I' = 5\,a + 3\,a = 8\,a.$$

Следовательно, новая э.д.с. равна

$$E' = U + I'R = 90 + 8 \cdot 2 = 106\ \ (в).$$

Таким образом, э.д.с. динамо-машины возросла со 100 до 106 *в*, т. е. на 6%. А так как магнитное поле индуктора не изменилось (ибо не изменилось напряжение), то угловая скорость машины возросла тоже на 6%.

578. Момент, приложенный к валу, равен моменту, действующему на якорь со стороны магнитного поля (так как машина вращается равномерно). Но последний зависит лишь от тока в якоре и пропорционален этому току (ибо магнитное поле создается постоянными магнитами.) Следовательно, ток увеличился тоже на 10%.

579. $N = I^2 r = \left(\dfrac{E}{r+R}\right)^2 r = \dfrac{(k\omega)^2}{(r+R)^2} r,$ где r — сопротивление внешней цепи, а R — сопротивление якоря. Поэтому, если ω возрастет на 10%, N увеличится на 21%.

580. Так как вращающий момент не изменился, то не изменится и ток. (См. решение задачи 578.)

581. Так как $R \geqslant 0$, то из рис. 213 заключаем, что $|\varphi| \leqslant 90°$.

582. Пусть этот ток протекает по проводнику с омическим сопротивлением R. Тогда средняя тепловая мощность получится равной

$$N = \frac{I_0^2 R\tau + 0^2 \cdot R\tau}{2\tau} = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

Приравняв ее тепловой мощности эффективного тока, получим:

$$I_э^2 R = \frac{I_0^2 R}{2},$$

откуда

$$I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

583. Из решения предыдущей задачи следует, что $I_0 = I_э\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,a$. Следовательно, искомое количество электричества равно

$$Q = I_0 \tau \frac{3600}{2\tau} = 3600\sqrt{2} \approx 5100\ (к).$$

584. $I = I_1 + I_2 = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$, что можно представить следующим образом:

$$I = \sqrt{3^2 + 4^2} \sin(\omega t + \alpha) = 5 \sin(\omega t + \alpha),$$

где α — угол, определяемый равенствами

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

(Поскольку $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$, то такой угол существует.) Следовательно, амплитуда тока I равна 5.

585. Направление от A к B будем считать положительным. Поскольку ток I_1 совпадает по фазе с напряжением $\varphi_A - \varphi_B$, а ток I_2 отстает от этого напряжения на $90°$, то

$$I_1 = 3\sqrt{2} \sin \omega t, \quad I_2 = 4\sqrt{2} \sin(\omega t - 90°).$$

(Так как эффективные значения токов I_1, I_2 равны $3\,a$ и $4\,a$, то их амплитудные значения равны $3\sqrt{2}\,a$ и $4\sqrt{2}\,a$.) Значит,

$$I = I_1 + I_2 = 3\sqrt{2} \sin \omega t - 4\sqrt{2} \cos \omega t.$$

Преобразовав эту разность методом, изложенным при решении предыдущей задачи, получим:

$$I = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} \sin(\omega t - \alpha) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha),$$

где α — угол, определяемый равенствами

$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5}.$$

Так как амплитуда тока I получилась равной $5\sqrt{2}$, то эффективное значение этого тока равно 5 *а*.

586. Для первой катушки:

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 110 \text{ ом},$$

а для второй:

$$\sqrt{(2R)^2 + (\omega L)^2} = 140 \text{ ом}.$$

Из этих равенств получаем:

$$3R^2 = 140^2 - 110^2 = 7500, \quad R = 50 \text{ ом}.$$

587. Искомое напряжение равно

$$U_{AC} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (I\omega L)^2},$$

где I — эффективный ток на участке ABC. Но $IR = U_{AB}$ и $I\omega L = U_{BC}$, где U_{AB} и U_{BC} — эффективные напряжения на участках AB и BC. Поэтому

$$U_{AC} = \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ (в)}.$$

588. Полное сопротивление участка

$$Z = X\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|.$$

Приравняв его нулю, получим:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,25 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 200 \text{ сек}^{-1}.$$

Значит, искомая частота $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200}{2\pi} \approx 32$ *гц*.

589. Искомое напряжение равно

$$U_{AC} = I\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \left|I\omega L - I\frac{1}{\omega C}\right| = |U_{AB} - U_{BC}|,$$

где I — эффективный ток, а U_{AB} и U_{BC} — эффективные напряжения соответствующих участков. Подставив числовые значения, получим:

$$U_{AC} = |100 - 20| = 80 \text{ (в)}.$$

590. Пусть I — эффективный ток в этой цепи. Тогда

$$U_{AD} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} =$$
$$= \sqrt{U_{BC}^2 + (U_{AB} - U_{CD})^2} = \sqrt{12^2 + (15 - 10)^2} = 13 \text{ (в)}.$$

591. Так как $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\omega L}{R}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{2\omega L}{R}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 2\operatorname{tg}\varphi_1 = 2\operatorname{tg}40^\circ = 1{,}68;\ \ \varphi_2 \approx 59^\circ.$$

592. Так как $\omega = 2\pi f = 314\ сек^{-1}$, то

$$X_L = \omega L \approx 63\ ом,\quad X_C = \frac{1}{\omega C} \approx 32\ ом,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 37\ ом,$$

$$I_э = \frac{U_э}{Z} \approx 2\ a,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = 1{,}55,\ \ \varphi \approx 57^\circ.$$

593. Так как $R = 20\ ом$ и $X_L \approx 63\ ом$, $X_C \approx 32\ ом$, то

$$U_R = I_э R \approx 40\ в,\ U_L = I_э X_L \approx 126\ в,\ U_C = I_э X_C \approx 64\ в.$$

594. Так как

$$I_L = \frac{U_{AB}}{\omega L} = \frac{U_{AB}}{1000\cdot 0{,}1} = \frac{U_{AB}}{100}(a),$$

$$I_C = \frac{U_{AB}}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{U_{AB}}{\dfrac{1}{1000\cdot 10^{-5}}} = \frac{U_{AB}}{100}(a),$$

то токи I_L и I_C одинаковы. Но первый из них на 90° отстает от U_{AB}, а второй — на 90° опережает U_{AB}. Значит, фазы этих токов противоположны, из чего заключаем, что $I_R = 0$.

(Полученный результат объясняется тем, что мы считали участок AB лишенным омического сопротивления. В действительности такое сопротивление всегда имеется, но если оно очень мало, то $I_R \approx 0$.)

595. Да, так как $\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$ может при этом уменьшиться.

596. Так как $R = \dfrac{3{,}5}{0{,}28} = 12{,}5\ (ом)$, то

$$I = \frac{127}{\sqrt{12{,}5^2 + (1/\omega C)^2}} = 0{,}28\ (a).$$

Подставив сюда $\omega = 50\cdot 2\pi\ сек^{-1}$, получим: $C \approx 7\ мкф$.

597. Так как $Z = \dfrac{U}{I}$, то

$$Z_{AB} = 100\ ом,\ Z_{BC} = 20\ ом.$$

Далее, так как $R = Z\cos\varphi$ и $X = Z\sin\varphi$ (см. рис. 213), то

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = Z_{AB}\cos\varphi_{AB} + Z_{BC}\cos\varphi_{BC} = 100\cos 10^\circ + 20\cos 50^\circ = 111\ \ (ом),$$

$$X_{AC} = X_{AB} + X_{BC} = Z_{AB}\sin\varphi_{AB} + Z_{BC}\sin\varphi_{BC} = 100\sin 10^\circ + 20\sin 50^\circ = 32\ \ (ом).$$

Следовательно,

$$Z_{AC} = \sqrt{R_{AC}^2 + X_{AC}^2} = \sqrt{111^2 + 32^2} = 116\ (ом),$$

$$I_{AC} = \frac{U}{Z_{AC}} = \frac{100}{116} = 0{,}86\ (a).$$

598. Имеем:

$$I_R = \frac{120}{60} \sin \omega t,\ I_L = \frac{120}{80} \sin (\omega t - 90^\circ).$$

$$I = I_R + I_L = 2 \sin \omega t - 1{,}5 \cos \omega t = 2{,}5 \sin (\omega t - \alpha),$$

где α — угол, определяемый равенствами

$$\cos \alpha = \frac{2}{2{,}5}, \quad \sin \alpha = \frac{1{,}5}{2{,}5}.$$

Следовательно,

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{120}{2{,}5} = 48\ ом.$$

599. Так как

$$I_L = \frac{120}{80} \sin (\omega t - 90^\circ), \quad I_C = \frac{120}{60} \sin (\omega t + 90^\circ),$$

$$I = I_L + I_C = -1{,}5 \cos \omega t + 2 \cos \omega t = 0{,}5 \cos \omega t,$$

то

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{120}{0{,}5} = 240\ ом.$$

600. В этом случае будет:

$$I = I_L + I_C = -1{,}5 \cos \omega t + 1{,}5 \cos \omega t = 0, \quad Z = \frac{120}{0} = \infty.$$

Этот результат получился потому, что мы считали участок AB не имеющим омического сопротивления. (Значит, если это сопротивление очень мало, то Z очень велико.)

601. При решении задачи 592 было найдено, что $I_э \approx 2\ a$, $\varphi \approx 57^\circ$. Следовательно,

$$N = U_э I_э \cos \varphi \approx 75 \cdot 2 \cdot \cos 57^\circ = 80\ (вт).$$

Другой способ: $N = I_э^2 R \approx 2^2 \cdot 20 = 80\ (вт)$.

602. Так как

$$N = I_э^2 R = \left(\frac{U_э^2}{Z}\right) R = \frac{U_0^2 R}{2Z^2} = \frac{U_0^2 R}{2\left[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right]},$$

то $N_{max} = \frac{U_0^2}{2R}$ и достигается при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, т. е. при $C = \frac{1}{\omega^2 L}$.

603. Так как $Z = \dfrac{R}{\cos\varphi}$ (см. рис. 213), то

$$I_э = \frac{U_э}{Z} = \frac{U_э \cos\varphi}{R}$$

и

$$N = U_э I_э \cos\varphi = U_э \frac{U_э \cos\varphi}{R} \cos\varphi = \frac{U_э^2}{R} \cos^2\varphi.$$

604. Так как $N = UI\cos\varphi$, то $I = \dfrac{N}{U\cos\varphi}$.

Значит, теряемая мощность

$$N' = I^2R = \left(\frac{N}{U\cos\varphi}\right)^2 R = \left(\frac{10^5}{220\cos 30^\circ}\right)^2 0{,}05 = 13\,770\ (\textit{вт}) = 13{,}77\ (\textit{квт}).$$

605. Согласно условию

$$\eta U_1 I_1 \cos\varphi = U_2 I_2.$$

Подставив числовые данные, получим:

$$(120 \cdot 0{,}5 \cdot \cos\varphi)\, 0{,}7 = 10 \cdot 3,$$

откуда

$$\cos\varphi = 0{,}714, \quad \varphi = 44^\circ 24'.$$

§ 25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

606. Так как $\omega = 1000\ \textit{сек}^{-1}$, то $T = \dfrac{2\pi}{1000}$ *сек*. Следовательно,

$$\frac{2\pi}{1000} = 2\pi\sqrt{L \cdot 10^{-5}},$$

откуда $L = 0{,}1$ *гн*.

607. Пусть данные частоты равны f_1 и f_2, а искомая частота равна f. Тогда

$$2\pi\sqrt{LC_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad 2\pi\sqrt{LC_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)} = \frac{1}{f}.$$

Из этих соотношений получаем:

$$f = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} = 24\ \textit{кгц}.$$

608. Пусть данные частоты равны f_1 и f_2, а искомая частота равна f. Тогда

$$2\pi\sqrt{LC_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad 2\pi\sqrt{LC_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$2\pi\sqrt{L\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} = \frac{1}{f}.$$

Выразив из двух первых равенств C_1 и C_2 и подставив полученные выражения в третье равенство, найдем:

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = 50 \text{ кгц}.$$

609. $$Q = W = \frac{q^2}{2C} = \frac{(10^{-4})^2}{2 \cdot 10^{-8}} = 0{,}5 \ (\partial ж).$$

610. Так как сумма $\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$ остается постоянной, то

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = W, \qquad \frac{LI_{\max}^2}{2} = W,$$

откуда $I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

611. Так как $\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$, то

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L} U^2 + I^2} = \sqrt{\frac{10^{-5}}{0{,}2} \cdot 1^2 + 0{,}01^2} \approx 0{,}012 \ (a).$$

612. Пусть индекс *1* относится к первому моменту (когда ток равен 0,01 *a*), а индекс *2* — ко второму (когда ток равен 0,005 *a*). Тогда

$$\frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2} = \frac{CU_2^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2},$$

откуда

$$U_2 = \sqrt{U_1^2 + \frac{L}{C}(I_1^2 - I_2^2)} = \sqrt{1^2 + \frac{0{,}2}{10^{-5}}(0{,}01^2 - 0{,}005^2)} \approx 1{,}22 \ (в).$$

Следовательно, искомый заряд $q_2 = CU_2 \approx 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ *к*.

613. Энергия контура

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{10^{-5} \cdot 2^2}{2} = 2 \cdot 10^{-5} \ (\partial ж).$$

Так как в рассматриваемый момент

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} W,$$

то искомый ток

$$I = \sqrt{\frac{W}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{0{,}2}} = 0{,}01 \ (a).$$

614. Так как $\frac{LI^2_{\max}}{2} = \frac{Q^2_{\max}}{2C}$, то

$$LC = \frac{Q_{\max}^2}{I_{\max}^2}.$$

Следовательно, искомая длина волны

$$\lambda = c\,2\pi\sqrt{LC} = 2\pi c\,\frac{Q_{max}}{I_{max}} = 2\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot\frac{10^{-6}}{10} = 189\ (м).$$

615. Пусть в начальный момент конденсатор этого контура заряжен до напряжения U_0. Тогда начальная энергия контура

$$W_0 = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Потеря энергии за время одного колебания

$$W' = I_э^2\,RT,$$

где $I_э$ — эффективный ток, а T — период колебаний. Считая колебание синусоидальным (на протяжении одного периода), получим:

$$I_э = \frac{U_э}{Z} = \frac{U_э}{\omega L} = \frac{U_0}{\omega L\sqrt{2}},$$

где $U_э$ — эффективное напряжение на конденсаторе. Подставив это выражение в предыдущее равенство, будем иметь:

$$W' = \frac{U_0^2\,RT}{2\omega^2 L^2},$$

и так как $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то

$$W' = \frac{U_0^2\,RT}{2\,\frac{1}{LC}\,L^2} = \frac{U_0^2\,RTC}{2L}.$$

Следовательно,

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{U_0^2\,RTC}{2L} : \frac{CU_0^2}{2} = \frac{RT}{L} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{0,2} = 10^{-5} = 0,001\ \%.$$

(Так как $\lambda = 300$ *м*, то $T = 10^{-6}$ *сек.*)

616. Полное сопротивление контура

$$Z = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \left|500\cdot 0,1 - \frac{1}{500\cdot 10^{-5}}\right| = 150\ (ом).$$

Следовательно,

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{15}{150} = 0,1\ (а).$$

617. В этом случае

$$Z = \left|1000\cdot 0,1 - \frac{1}{1000\cdot 10^{-5}}\right| = 0,$$

и поэтому $I_0 = \frac{15}{0} = \infty$. Полученный ответ показывает, что если омическое сопротивление контура очень мало (мы его считали равным нулю), то I_0 очень велико.

618. Так как $I_0 = \frac{E_0}{Z}$, где

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2},$$

то ток будет максимальным тогда, когда Z минимально, т. е. при

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

В этом случае $Z = R$ и $I_0 = \frac{E_0}{R}$.

619. Так как $T = 2\pi\sqrt{LC}$, то $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Следовательно, $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, откуда $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 26. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ

620. Пусть S' — отражение точки S. Так как угол $S'OS$ вдвое больше угла AOS, то угловая скорость радиуса OS' равна 2ω. Поэтому искомая скорость $v = 2\omega OS = 2\omega l$.

621. Пусть S' — отражение точки S, а K — точка, в которой зеркало пересекает отрезок $S'S$. Так как $S'K$ все время вдвое меньше $S'S$, то скорость точки K и, следовательно, искомая скорость v' равна $\frac{v}{2}$.

622. Пусть S' — отражение точки S. Точка S' имеет вертикальную скорость 3 *см/сек* (за счет движения точки S) и горизонтальную скорость 4 *см/сек* (за счет движения зеркала). Следовательно, искомая скорость равна $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ (*см/сек*).

623. Пусть v_1, v_2, v_3 — скорости света в первой, второй и третьей среде. Тогда

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{v_1}{v_3}, \quad \frac{\sin 60^\circ}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_3},$$

откуда

$$\sin\beta = \sin 60^\circ\left(\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}\right)\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}\right) = 0{,}612;\ \beta \approx 38^\circ.$$

624. Пусть индекс *1* относится к воде, а индекс *2* — к стеклу. Тогда $\sin 49^\circ = \frac{1}{n_1}$, $\sin 42^\circ = \frac{1}{n_2}$, откуда

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 49^\circ} \approx 0{,}89;\ \alpha_0 \approx 63^\circ.$$

625. $\frac{\sin\varphi}{\sin 45^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$, $\frac{\sin\varphi}{\sin 30^\circ} = \frac{n_3}{n_1}$, где φ — угол падения. Отсюда

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_2/n_1}{n_3/n_1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha_0 = 45^\circ.$$

626. Из равенств

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ}=n, \quad \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin 45^\circ}=n$$

получаем:

$$(n\sin 30^\circ)^2+(n\sin 45^\circ)^2=1,$$

откуда $n=1{,}15$.

627. Пусть v_1 — скорость света в воздухе, v_2 — в воде и v_3 — в масле. Тогда до наливания масла

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2},$$

где α — угол падения луча на границу воздух—вода, а β — угол преломления в воде. После того как будет налит слой масла,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}=\frac{v_1}{v_3}, \quad \frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}=\frac{v_3}{v_2},$$

где α — угол падения луча на границу воздух — масло, β' — угол преломления в масле и β'' — в воде. Перемножив два последних равенства, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta''}=\frac{v_1}{v_2},$$

т. е. $\beta''=\beta$. Следовательно, угол поворота луча не изменится.

628. Предположим, что луч выйдет в воздух. Тогда, обозначив угол падения этого луча на границу вода — масло через α, на границу масло — воздух — через β и угол преломления в воздухе — через γ, будем иметь:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{v_2}{v_3},$$

где v_1 — скорость света в воде, v_2 — в масле и v_3 — в воздухе. Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{v_1}{v_3}, \quad \sin\gamma=\frac{v_3}{v_1}\sin\alpha$$

или

$$\sin\gamma=n\sin\alpha,$$

где n — показатель преломления воды. С другой стороны, так как раньше этот луч полностью отражался от поверхности вода—воздух, то

$$\sin\alpha>\frac{1}{n}.$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$\sin\gamma>1,$$

что указывает на ошибочность предположения о выходе этого луча в воздух.

629. Из геометрических соображений ясно, что луч *2* параллелен лучу *4* (см. рис. 232). Отсюда следует, что луч *5* параллелен лучу *1*, т. е. $\beta = \alpha$.

630. Так как падающий луч отклонен от горизонтали на 15°, то угол падения равен $15^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 37{,}5^\circ$. Так как внутри призмы луч идет в горизонтальном направлении, то угол преломления равен $\frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$. Следовательно,

$$n = \frac{\sin 37{,}5^\circ}{\sin 22{,}5^\circ} = 1{,}59.$$

631. На рис. 304 показан один из лучей, идущих от монеты. Так как $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$ и $\sin\gamma = \cos\beta$, то

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}.$$

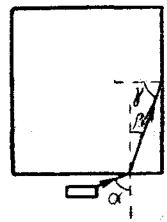


Рис. 304

Но выйти через боковую грань призмы этот луч сможет лишь, если $\sin\gamma \leqslant \frac{1}{n}$, т. е. если

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} \leqslant \frac{1}{n}$$

или

$$\sin^2\alpha \geqslant n^2 - 1.$$

Но при $n = 1{,}5$ это условие не выполняется ни при каком α.

632. Когда свет распространяется в среде с переменной оптической плотностью.

§ 27. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА И ЛИНЗЫ

633. $D = \frac{1}{F} = \frac{1}{0{,}5R} = \frac{1}{\infty} = 0.$

634. Положив в равенстве

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)$$

$F = R$, получим: $n = 1{,}5$.

635. Положив в равенстве

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $F = R$, получим: $n = 2$.

636. Коэффициент преломления стекла относительно воздуха равен $\frac{3}{2}$, а коэффициент преломления воздуха относительно воды равен $\frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$. Следовательно,

$$\frac{1}{40} = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где F — искомое фокусное расстояние воздушной линзы. Из этих соотношений получаем: $F = -70$ *см*. Отрицательный знак указывает на то, что эта линза рассеивающая.

637. Так как $D = \frac{1}{F}$, то

$$5 = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad -1 = \left(\frac{1{,}5}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где n — искомый коэффициент преломления жидкости. Из этих равенств получаем: $n = \frac{5}{3}$.

638. Вычислив радиус кривизны линзы, получим:

$$R = \frac{D^2 + 4d^2}{8d} = 13 \text{ см}.$$

Далее,

$$\frac{1}{F} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2R},$$

откуда $F = 2R = 26$ *см*.

639. Пусть фокусное расстояние линзы равно F, а лампа находится на расстоянии a. Тогда из равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{F}$$

получим:

$$a' = \frac{aF}{a - F}.$$

Так как a' должно отличаться от F менее чем на 1%, то

$$\frac{aF}{a - F} - F < 0{,}01F,$$

откуда $a > 101\ F$.

640. Так как

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{20},$$

то $a' = -60$ *см*. Поскольку $a' < 0$, то изображение мнимое.

641. Из равенства

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{40}$$

получаем: $a = 120$ *см*.

642. Из равенства

$$\frac{1}{50} - \frac{1}{25} = \frac{1}{F}$$

получаем: $F = -50$ *см*. Следовательно, линза рассеивающая.

643. Точка S является мнимым источником света. Так как $a = -OS = -20$ *см*, то

$$-\frac{1}{20} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{30},$$

откуда $a' = OS' = 60$ *см*. Так как $a' > 0$, то точка S' находится правее точки O.

644. Если в равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{F}$$

подставить $a = -F$, то получим: $a' = \frac{F}{2}$. Так как $a' > 0$, то изображение действительное.

645. Из равенства

$$-\frac{1}{40} - \frac{1}{60} = \frac{1}{F}$$

получаем: $F = -24$ *см*. Следовательно, линза рассеивающая.

646. Так как $a = x = 50$ *см*, то

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{30},$$

откуда $a' = 75$ *см*. Следовательно, абсцисса точки A' равна $x' = -75$ *см*. Далее, так как

$$\frac{|x'|}{|y'|} = \frac{x}{y},$$

то

$$|y'| = |x'| \frac{y}{x} = 75\,\frac{10}{50} = 15 \text{ см}.$$

Учтя, что точка A' лежит ниже оси x, получим: A' (—75 *см*, —15 *см*).

647. В этом случае абсцисса точки A' положительна, а ордината отрицательна. Следовательно, A' (75 *см*, —15 *см*).

648. Центр линзы находится в точке пересечения прямой AA' с главной оптической осью. Исходя из этого, получаем:

$$a = \frac{lh}{h - h'} = 30 \text{ см}, \quad a' = \frac{lh'}{h - h'} = 20 \text{ см}.$$

Так как точка A действительная, а точка A' — мнимая, то

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{20}=\frac{1}{F},$$

откуда $F=-60$ *см*. (Следовательно, линза рассеивающая.)

649. Если изображение, полученное в точке B, было действительным, то точки C и A совпадают. Если же это изображение было мнимым, то точка C отлична от точки A.

650. Из условия следует, что линза находится слева от точки A. Пусть ее расстояние от этой точки равно x. Тогда, учитывая, что изображения B и C мнимые, получим:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{10+x}=\frac{1}{F},\quad \frac{1}{10+x}-\frac{1}{30+x}=\frac{1}{F}.$$

Решив эту систему двух уравнений с двумя неизвестными, найдем: $F=120$ *см*.

651. Так как $k=\frac{|a'|}{|a|}=3$, то $|a'|=3\,|a|=30$ *см*. Следовательно, возможны два варианта:

1) $a'=30$ *см*. Тогда

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{F},\quad F=7{,}5 \text{ см}.$$

2) $a'=-30$ *см*. Тогда

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{1}{F},\quad F=15 \text{ см}.$$

652. Из равенства

$$\frac{1}{F/n}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}$$

получаем: $|a'|=\frac{F}{n-1}$. Следовательно,

$$k=\frac{|a'|}{|a|}=\frac{F}{n-1}:\frac{F}{n}=\frac{n}{n-1}.$$

653. Пусть F — абсолютная величина фокусного расстояния. Тогда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=-\frac{1}{F}.$$

Подставив сюда $a=F$, получим: $a'=-\frac{F}{2}$. Следовательно, искомое уменьшение

$$\frac{|a|}{|a'|}=\frac{F}{F/2}=2.$$

654. Из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}$$

получаем:

$$|a'| = \frac{aF}{d},$$

где d — расстояние от предмета до переднего фокуса линзы. Следовательно,

$$k = \frac{|a'|}{|a|} = \frac{F}{d},$$

и так как размер изображения пропорционален коэффициенту k, то, уменьшив на 20% d, мы увеличим на 25% размер изображения.

655. Когда точка A пройдет путь Δs, ее изображение пройдет путь $\Delta s'$, причем

$$\frac{\Delta s'}{\Delta s} = k = \frac{a'}{a} = \frac{aF}{a-F} : a = \frac{F}{a-F}.$$

Следовательно,

$$\Delta s' = \frac{F}{a-F}\Delta s = 2\Delta s,$$

и поэтому $v' = 2v = 4$ *см/сек.*

656. Из равенств

$$a + a' = 25, \quad \frac{a'}{a} = 1{,}5$$

находим: $a = 10$ *см*, $a' = 15$ *см*. Следовательно,

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{F}, \quad F = 30 \text{ см}, \ R = 2F = 60 \text{ см}.$$

657. Пусть при первом положении линзы она удалена от предмета на расстояние x, а при втором — на расстояние y. Тогда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{90-x} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{90-y} = \frac{1}{F}.$$

Далее, так как первое увеличение вчетверо больше второго, то

$$\frac{90-x}{x} = 4\frac{90-y}{y}.$$

Решив полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем: $F = 20$ *см*.

658. Если при первом положении линзы она давала увеличение k, то при втором, очевидно, даст увеличение $1/k$. Поэтому, если высота предмета равна h, то

$$\frac{h_2}{h} = 1 : \frac{h_1}{h},$$

откуда $h = \sqrt{h_1 h_2}$.

659. Из равенств

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}=\frac{1}{12}, \quad a'-a=2$$

находим: $a=4$ *см*, $a'=6$ *см*. Значит, $k=\frac{a'}{a}=1{,}5$.

660. Так как

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}=\frac{1}{F},$$

то

$$a'=\frac{aF}{F-a}, \quad \frac{a'}{a}=k=\frac{F}{F-a}.$$

В первом случае $k=4$ и, следовательно, $a=\frac{3}{4}F$. Значит, во втором случае $a=\frac{3}{8}F$, и поэтому

$$k=\frac{F}{F-3F/8}=1{,}6.$$

661. До уменьшения оптической силы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}, \quad \frac{a'}{a}=3,$$

и, следовательно, $a=\frac{4}{3}F$.

После уменьшения оптической силы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{2F},$$

где $a=\frac{4}{3}F$. Отсюда $a'=-4F$ и

$$k=\frac{|a'|}{|a|}=\frac{4F}{\frac{4}{3}F}=3.$$

Следовательно, увеличение не изменится. (Но изображение станет мнимым.)

662. Из равенств

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}, \quad \frac{a'}{a}=k$$

следует, что

$$k=\frac{F}{a-F}.$$

Далее будем иметь:

$$k_1=\frac{F}{a_1-F}, \quad k_2=\frac{F}{a_2-F},$$

$$k=\frac{F}{\frac{a_1+a_2}{2}-F}.$$

Разрешив два первых равенства относительно a_1 и a_2 и подставив полученные выражения в третье равенство, найдем:

$$k = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} = 2{,}4.$$

663. Из равенств

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{F}, \quad \frac{a'}{a} = 2$$

находим:

$$a = \frac{1}{2}F, \ a' = F,$$

где a и a' — расстояния от линзы до точки A и ее изображения A'. Аналогично из равенств

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{F}, \quad \frac{b'}{b} = 3$$

найдем:

$$b = \frac{2}{3}F, \ b' = 2F,$$

где b и b' — расстояния от линзы до точки B и ее изображения B'. Следовательно,

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b' - a'}{b - a} = \frac{2F - F}{\frac{2}{3}F - \frac{1}{2}F} = 6.$$

§ 28. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

664. Так как линзы *1* и *2* образуют пластинку, оптическая сила которой равна нулю, то $D_1 + D_2 = 0$, откуда $D_2 = -D_1 = -3$ *дптр*.

665. Так как оптическая сила стеклянной пластинки равна нулю, то

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0.$$

Кроме того,

$$D_1 + D_2 = -2, \quad D_2 + D_3 = -3.$$

Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, получим: $D_2 = -5$ *дптр*.

666. Свет, падающий на эту оптическую систему, проходит через линзу, отражается от зеркала и вновь проходит через линзу. Следовательно,

$$D = D_1 + D_2 + D_1 = 2D_1 + D_2,$$

где D_1 — оптическая сила линзы, а D_2— зеркала. Так как $D_1 = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ *дптр*, а $D_2 = 0$, то $D = 5$ *дптр*.

667. 1) Если посеребрить плоскую поверхность, то свет, падающий на линзу, пройдет через нее, отразится от плоской поверхности и вновь пройдет через линзу. Поэтому

$$D = D_1 + D_2 + D_1 = 2D_1 + D_2,$$

где D_1 — оптическая сила линзы, а D_2 — плоского зеркала. Так как $D_1 = 1$ *дптр*, а $D_2 = 0$, то $D = 2$ *дптр*.

2) Если посеребрить сферическую поверхность, то

$$D = D_1 + D_2 + D_1 = 2D_1 + D_2,$$

где D_1 — оптическая сила линзы, а D_2 — вогнутого зеркала, образованного посеребренной поверхностью. Так как $D_1 = 1$ *дптр* и $D_2 = \frac{2}{R} = \frac{2}{0,5} = 4$ *дптр*, то $D = 6$ *дптр*.

668. Так как свет проходит через воду, отражается от зеркала и снова проходит через воду, то

$$D = D_1 + D_2 + D_1 = 2D_1 + D_2,$$

где D_1 — оптическая сила «водяной» линзы, а D_2 — зеркала. Но

$$D_1 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{3R}, \qquad D_2 = \frac{2}{R}.$$

Поэтому

$$D = 2\frac{1}{3R} + \frac{2}{R} = \frac{8}{3R},$$

$$F = \frac{1}{D} = \frac{3R}{8} = 0,15 \text{ м}.$$

669. Так как свет проходит через линзу, отражается от ее задней поверхности и опять проходит через линзу, то $D = 2D_1 + D_2$, где D_1 — оптическая сила линзы, а D_2 — выпуклого зеркала, образованного ее задней поверхностью. Поскольку

$$D_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{2(n-1)}{3R}, \qquad D_2 = -\frac{2}{3R},$$

то

$$D = 2D_1 + D_2 = \frac{4n-6}{3R},$$

и так как $D = 0$, то $n = 1,5$.

670. Оптическая сила непосеребренной линзы

$$D_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{n-1}{R},$$

а оптическая сила зеркала, образованного ее сферической поверхностью,

$$D_2 = \frac{2}{R}.$$

Так как свет дважды проходит через линзу и один раз отражается от зеркала (плоского или сферического), то

$$\frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{R} = 4,$$

$$\frac{n-1}{R} + \frac{2}{R} + \frac{n-1}{R} = 9.$$

Из этих равенств получаем: $n = 1{,}8$.

671. Оптическая сила этой системы равна 5 *дптр* (см. решение задачи 666). Следовательно,

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = 5, \quad h' = \frac{h}{5h-1} = -0{,}2 \text{ м}.$$

Так как $h' < 0$, то изображение точки S будет мнимым.

672. $D = 2D_1 + D_2$, где D_1 — оптическая сила непосеребренной линзы, а D_2 — зеркала. Так как $D_1 = \frac{1}{0{,}25} = 4$ *дптр* и $D_2 = \frac{2}{0{,}4} = 5$ *дптр*, то $D = 13$ *дптр*. Далее из равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = D$$

получим:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{a'} = 13,$$

откуда $a' \approx 0{,}08$ *м*.

673. Так как лучи возвращаются в точку S, то

$$\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}2} = D, \quad D = 10 \text{ дптр}.$$

С другой стороны,

$$D = 2D_1 + D_2 = 2D_1 + \frac{2}{R},$$

и поэтому

$$10 = 2D_1 + \frac{2}{1}, \quad D_1 = 4 \text{ дптр},$$

где D_1 — оптическая сила линзы. Значит, $F = \frac{1}{D_1} = 0{,}25$ *м*.

674. Из равенств $k = \frac{a'}{a}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = D$ получим:

$$k = \frac{1}{aD-1}.$$

Следовательно,

$$k_1 = \frac{1}{aD_1 - 1}, \quad k_2 = \frac{1}{aD_2 - 1},$$

$$k = \frac{1}{a(D_1 + D_2) - 1}.$$

Записав последнее равенство в виде

$$k = \frac{1}{(aD_1 - 1) + (aD_2 - 1) + 1},$$

получим:

$$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2 + 1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2 + k_1 k_2}.$$

Если $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$, то $k = 6/11$.

675. В телескопической системе $d = F_1 + F_2$, где d — расстояние между линзами. Но фокусное расстояние линзы обратно пропорционально $n - 1$ (см. формулу (209) на стр. 122). Следовательно,

$$\frac{d'}{d} = \frac{n-1}{n'-1},$$

и так как $n = \frac{3}{2}, \quad n' = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8},$

то

$$\frac{d'}{d} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{9}{8} - 1} = 4.$$

Значит, расстояние между линзами надо увеличить вчетверо.

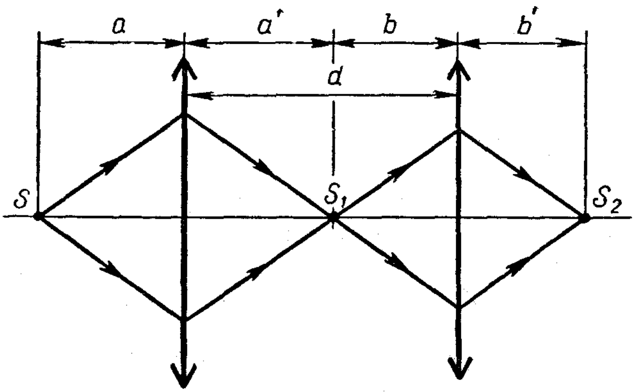


Рис. 305.

676. Согласно рис. 305 имеем: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = D_1$, $\frac{1}{0,5} + \frac{1}{a'} = 4$, $a' = 0,5$ *м*, $b = d - a' = 0,9 - 0,5 = 0,4$ (*м*), $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = D_2$, $\frac{1}{0,4} + \frac{1}{b'} = 5$, $b' = 0,4$ *м*.

Значит, изображение, создаваемое этой системой, находится на расстоянии 40 *см* за второй линзой.

677. При решении предыдущей задачи было найдено, что $a' = 0{,}5$ *м*. Так как $d = 0{,}3$ *м*, то точка S_1 будет лежать за второй линзой, т. е. будет для этой линзы мнимой. Далее получим:

$$b = -(a' - d) = -(0{,}5 - 0{,}3) = -0{,}2 \text{ м},$$

$$-\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{b'} = 5, \quad b' = 0{,}1 \text{ м}.$$

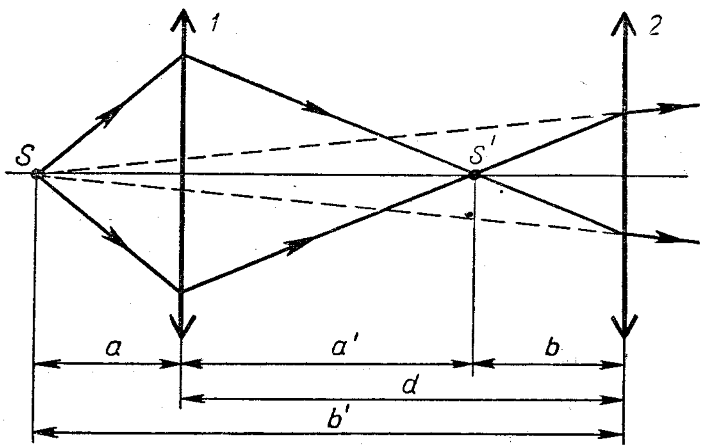


Рис. 306

678. Из рис. 306 имеем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = D_1, \quad \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{a'} = 6, \quad a' = 0{,}5 \text{ м},$$

$$b = d - a' = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25 \text{ (м)},$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = D_2, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a+d} = D_2,$$

$$D_2 = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}25 + 0{,}75} = 3 \text{ дптр}.$$

679. Применив формулу линзы, найдем, что

$$l = \frac{F^2 - dF}{d},$$

где F — фокусное расстояние первой линзы, d — расстояние между линзами и l — расстояние точки S от второй линзы. Если поменять линзы местами, то получится

$$l' = \frac{F^2 + dF}{d}.$$

Следовательно, $l' - l = 2F = 2 \cdot 20 = 40$ (*см*).

680. Пусть S — рассматриваемый предмет, а S' — его изображение, создаваемое объективом. Расстояние от объектива до точки S обозначим через x, а до точки S' — через x'.

Если $x = \infty$, то $x' = 0{,}5$ *м*, а если $x = 50$ *м*, то

$$x' = \frac{xF}{x - F} = \frac{50 \cdot 0{,}5}{50 - 0{,}5} = 0{,}505 \text{ (м)}.$$

Следовательно, во втором случае изображение будет смещено на $0{,}005$ *м* $= 5$ *мм*. А так как окуляр является лупой, через которую рассматривается точка S', то его следует переместить на такое же расстояние.

681. Так как $k = \frac{F}{|a - F|}$, где a — расстояние от предмета до линзы, то объектив дает увеличение

$$k_1 = \frac{F_1}{|a - F_1|} = \frac{3}{3{,}1 - 3} = 30.$$

Далее,

$$b = l - a' = l - \frac{aF_1}{a - F_1} = 135 - \frac{3{,}1 \cdot 3}{3{,}1 - 3} = 42 \text{ (мм)},$$

где b — расстояние от окуляра до изображения, созданного объективом. Следовательно, окуляр дает увеличение

$$k_2 = \frac{F_2}{|b - F_2|} - \frac{50}{|42 - 50|} = 6{,}25.$$

Полное увеличение равно $k_1 k_2 = 30 \cdot 6{,}25 = 187{,}5$.

§ 29. ФОТОМЕТРИЯ

682. Муха задержит часть света, поступающего в объектив, что приведет к некоторому потускнению снимка. (Никакого изображения мухи на фотографии не получится.)

683. $\Phi = \frac{40}{0{,}00147} = 27\,300$ (*лм*). Следовательно, $I = \frac{27300}{4\pi} \approx$ ≈ 2200 (*св*).

684. Сила света Луны равна $0{,}1 \cdot 2 \cdot (384 \cdot 10^6)^2 = 3 \cdot 10^{16}$ (*св*). Искомое отношение равно $\frac{3 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 10^9} = 15 \cdot 10^6$.

685. В $\left(\frac{600}{6}\right)^2 = 10\,000$ раз.

686. Имеем:

$$\frac{I}{r_1^2} = E_1, \quad \frac{I}{r_2^2} = E_2, \quad \frac{I}{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2} = E.$$

Выразив из двух первых равенств r_1 и r_2 и подставив полученные выражения в третье равенство, найдем: $E = 23{,}04$ *лк*.

687. Пусть сила света точечного источника равна I. Тогда получим:

$$\omega = 2\pi, \quad \Phi = 2\pi I, \quad E = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\pi I}{4\pi R^2} = 2\frac{I}{(2R)^2}.$$

А так как

$$\frac{I}{(2R)^2} = E_0, \text{ то } E = 2E_0.$$

688. Пусть сила света лампы равна I. Тогда

$$E = \frac{I\omega}{\pi R^2} = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{I}{H^2} = \frac{\omega}{\pi} E_0,$$

где ω — телесный угол, внутри которого распространяется поток, освещающий стол. Вычисляя этот угол, получим:

$$\omega = \pi(2 - \sqrt{2}), \quad E = (2 - \sqrt{2})\, E_0 \approx 0{,}6\, E_0.$$

689. $I = \dfrac{\Phi}{\omega}$ и $I' = \dfrac{\Phi'}{\omega'}$, где Φ — световой поток, внутри телесного угла ASB, а Φ' — внутри телесного угла $A'ABB'$ (рис. 307). Но так как зеркало плоское и идеально отражающее, то $\omega = \omega'$ и $\Phi = \Phi'$. Следовательно, $I = I'$.

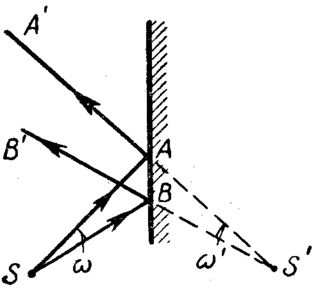


Рис. 307

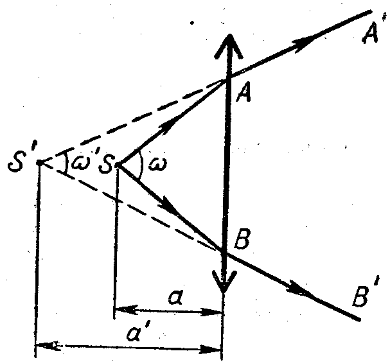


Рис. 308

690. $I' = \dfrac{\Phi}{\omega'}$, где Φ — световой поток внутри телесного угла $A'ABB'$ (рис. 308). Считая углы ω и ω' малыми, будем иметь:

$$\omega = \frac{(AB)^2}{a^2}, \quad \omega' = \frac{(AB)^2}{(a')^2}, \quad \omega' = \omega\left(\frac{a}{a'}\right)^2,$$

$$I' = \frac{\Phi}{\omega'} = \frac{\Phi}{\omega}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = I\left(\frac{a'}{a}\right)^2,$$

где I — сила света источника S. Далее, так как $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{F}{F-a}$, то

$$I' = I\left(\frac{F}{F-a}\right)^2 = 60\left(\frac{50}{50-30}\right)^2 = 375\ (\mathit{св}).$$

691. Если $F = 30$ *см* $= a$, то

$$I' = 60\left(\frac{30}{30-30}\right)^2 = \infty.$$

Полученный результат объясняется тем, что при $a = F$ пучок лучей, выходящих из линзы, будет параллельным и угол ω' окажется равным нулю. (Так как точечных источников реально не существует, то в действительности лучи, выходящие из линзы, не будут строго параллельными.)

692. Лучи, прошедшие линзу, можно считать выходящими из мнимого источника S', лежащего слева от линзы на расстоянии

$$a' = \frac{Fa}{F-a} = 0{,}75 \text{ м}.$$

Поэтому

$$E = \frac{I'}{(S'P)^2} = \frac{I'}{(0{,}75+4{,}25)^2} = \frac{I'}{25},$$

где I' — сила света источника S'. Но, как было установлено при решении задачи 690,

$$I' = I\left(\frac{F}{F-a}\right)^2 = 60\left(\frac{0{,}5}{0{,}5-0{,}3}\right)^2 = 375 \text{ (св)}.$$

Следовательно, $E = \frac{375}{25} = 15$ (*лк*).

693. $E = \frac{\Phi}{s}$, где Φ — поток, проходящий через линзу, а s — площадь экрана, на которую падает этот поток. Но так как источник S находится в главном фокусе, то s есть площадь линзы и, следовательно, $\frac{\Phi}{s} = \frac{I}{F^2}$. Таким образом,

$$E = \frac{I}{F^2} = 400 \text{ (лк)}.$$

694. Если $I = 27$ *св*, $a = 0{,}3$ *м* и $E = 300$ *лк*, то $E = \frac{I}{a^2}$, т. е. освещенность экрана такова же, как освещенность линзы. Следовательно, лучи, выходящие из линзы, параллельны главной оптической оси, и поэтому, отодвигая экран, мы не изменяем его освещенности.

695. При наличии линзы освещенность равна $E = \frac{I}{F^2}$ (см. решение задачи 693). Если линза отсутствует, то освещенность равняется $E_0 = \frac{I}{(SP)^2}$. Следовательно,

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{SP}{F}\right)^2 = 9.$$

696. Рассмотрим пучок лучей в узком телесном угле ω (рис. 309). Искомая освещенность $E = \frac{I\omega}{s'}$, где I — сила света источника, а s' — площадь экрана, на которую падают лучи, заполняющие телесный угол ω. Далее, так как $\omega = s/a^2$, то

$$E = \frac{I}{a^2} \cdot \frac{s}{s'},$$

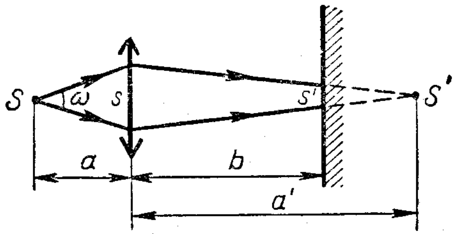


Рис. 309

причем

$$\frac{s}{s'} = \left(\frac{a'}{a' - b}\right)^2, \quad a' = \frac{aF}{a - F}.$$

Отсюда

$$\frac{s}{s'} = \left(\frac{aF}{aF + bF - ab}\right)^2, \; E = I\left(\frac{F}{aF + bF - ab}\right)^2.$$

Подставив числовые данные, получим: $E = 40$ *лк*.

697. Плоское зеркало приводит к появлению еще одного источника, являющегося отражением источника S. Освещенность, создаваемую этим отражением, можно вычислить по формуле

$$E' = I\left(\frac{F}{aF + bF - ab}\right)^2,$$

полученной при решении предыдущей задачи. Так как в данном случае $I = 10$ *св*, $F = 0{,}8$ *м*, $a = 1$ *м* $+ 2 \cdot 0{,}1$ *м* $= 1{,}2$ *м*, $b = 2$ *м*, то

$$E' = 250 \text{ лк}.$$

Но поскольку сам источник S создает в точке P освещенность $E = 40$ *лк* (см. ответ к предыдущей задаче), то суммарная освещенность этой точки

$$E + E' = 40 \text{ лк} + 250 \text{ лк} = 290 \text{ лк}.$$

698. Так как размеры лампы малы по сравнению с расстоянием a, то

$$\Phi = I\omega = I\,\frac{\pi D^2}{4a^2},$$

где Φ — световой поток, проходящий через линзу. Так как этот поток освещает площадь s (площадь изображения лампы), то

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ID^2}{a^2 s} \approx 80 \text{ лк}.$$

699. При решении предыдущей задачи было получено соотношение

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ID^2}{a^2 s}.$$

Но $s = k^2 S$, где k — коэффициент увеличения, а S — площадь лампы (точнее, площадь силуэта лампы). Следовательно,

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ID^2}{S} \cdot \frac{1}{k^2 a^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ID^2}{S} \cdot \frac{1}{(a')^2},$$

где a' — расстояние от линзы до изображения лампы. Если поменять местами экран и лампу, то величины I, D, S останутся неизменными, а a' станет вдвое меньше (так как $a' = 2a$). Отсюда следует, что E увеличится в четыре раза.

700. На сетчатке глаза образуется изображение фонаря. Когда расстояние до фонаря становится вдвое больше, линейные размеры этого изображения уменьшаются вдвое, а площадь — вчетверо. Но так как расстояние от фонаря до глаза стало вдвое больше, то попадающий в глаз световой поток уменьшился тоже вчетверо. Значит, освещенность сетчатки осталась прежней.

ОТВЕТЫ

1. На 86,4 *см*. **2.** Примерно через сто лет. **3.** 5 *м/сек*. **4.** $t = 2$ *сек*. **5.** В 5 *ч*. **6.** 5 *м/сек*. **7.** Нет. **8.** $\approx 6{,}7$ *см*. **9.** $v \operatorname{tg} 30°$. **10.** 0. **11.** 48 *км/ч*. **12.** 10 *м/сек*^{2}. **13.** —10 *м/сек* и 6 *м/сек*^{2}. **14.** Через 2 *сек* и через 3 *сек*. **15.** Через 3 *сек*. **16.** 1) 5,2 *м/сек*; 2) — 4,8 *м/сек*. **17.** На расстоянии 10 *м*. **18.** — 5 *м/сек*^{2}. **19.** 1) 8,4 *м*; 2) 11,6 *м*. **20.** На 4,14 *м/сек*. **21.** $a_2 > a_1$. **22.** Нельзя. **23.** Нет. **24.** 0,5 *м/сек*. **25.** 7 *сек*. **27.** 1) 3 *м*; 2) 0,25 *м/сек*. **29.** 1) В момент t_2; 2) у точки 1. **30.** В точке $x = x_2$. **31.** Нет. **32.** Да. **33.** 5 *м/сек*. **34.** 15° или 75°. **35.** $\approx 64°$. **36.** $y = x \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$. **37.** 14 *м/сек* и 15,7 *м/сек*. **38.** $\approx 42°$. **39.** $\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ и $\dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. **40.** $\approx 53°$. **41.** 45°. **42.** $\dfrac{2v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \times (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi)$. **43.** $\approx 77°$. **44.** Равной нулю. **45.** 1) $\approx 0{,}034$ *м/сек*^{2}; 2) почти в 17 раз. **46.** π *сек*$^{-2}$. **47.** —0,1 *сек*$^{-2}$. **48.** 6 *сек*$^{-1}$ и 1 *сек*$^{-2}$. **49.** Через 10 *сек*. **50.** $v = 150$ *м/сек*, $a_n = 22\,500$ *м/сек*^{2}, $a_t = 10$ *м/сек*^{2}, $a \approx a_n$. **51.** Через 0,5 *сек*. **52.** Через 5 *сек*. **53.** $\approx 85°$. **54.** $\approx 8{,}9$ *м/сек*^{2}. **55.** $v\sqrt{2}$. **56.** $v\dfrac{R-r}{r}$. **57.** 100 *см/сек*. **58.** В 6 раз. **59.** 5 *м/сек*. **60.** На 5 *см*. **61.** Не будет. **62.** 50 *см/сек*. **63.** 100 *км/ч*. **64.** $\alpha = 2°9'$. **65.** 25 *м/сек*. **66.** 4 *км/сек*. **67.** 24 *км/ч*. **68.** $\omega a \operatorname{tg} \alpha$. **69.** g. **70.** $\sqrt{a^2 + g^2}$. **71.** 1600 *м/сек*^{2}. **72.** 2 *м/сек*^{2}. **74.** 0,8 g. **75.** $g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$ и $mg \cos \alpha$. **76.** $m(a + g)$. **77.** Больше g. **78.** $\dfrac{m(g + a)}{2 \cos \alpha}$. **79.** $g \operatorname{tg} \alpha$. **80.** $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{g}$. **81.** $\dfrac{ma}{\cos \alpha}$ и $m(g - a \operatorname{tg} \alpha)$. **82.** $\dfrac{m(a + kg)}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$ и $\dfrac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$. **83.** $m(g \sin \alpha + a \cos \alpha)$ и $m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$. **84.** $g \sin \alpha - a \cos \alpha$ и $m(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$. **85.** $\dfrac{F}{m_1 + m_2}$ и $\dfrac{Fm_2}{m_1 + m_2}$. **86.** 70 *н*. **87.** 1) $g\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$; 2) $\dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$. **88.** 1) $(g + w)\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$; 2) $\dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + w)$. **89.** $2mg$. **90.** 12 *н*. **91.** 0. **92.** 900 *н*. **93.** 300 *н*. **94.** $\dfrac{PQ}{P + Q} \times \dfrac{a + g}{g}$. **95.** 1) $\dfrac{mg \sin \alpha}{m + M}$; 2) $\dfrac{mMg \sin \alpha}{m + M}$; 3) $mg \cos \alpha$; 4) Mg. **96.** $\dfrac{Fr - mgR}{mR}$. **97.** 1) $\dfrac{(m_1R - m_2r)R}{m_1R^2 + m_2r^2}g$ и $\dfrac{(m_1R - m_2r)r}{m_1R^2 + m_2r^2}g$; 2) $\dfrac{m_1m_2gr(R+r)}{m_1R^2 + m_2r^2}$ и $\dfrac{m_1m_2gR(R + r)}{m_1R^2 + m_2r^2}$. **98.** $\dfrac{MR_2 - mgR_1r}{mR_1r}$. **99.** 1) $\dfrac{(F \cos \alpha - mg \sin \alpha) \cos \alpha}{m}$; 2) $F \sin \alpha + mg \cos \alpha$. **100.** 0,984 mg. **101.** ≈ 84 *мин*. **102.** $\approx 7{,}5$ *н*. **103.** $m_1\omega^2R_1$ и $m_1\omega^2R_1 + m_2\omega^2R_2$. **104.** 40 *см*. **105.** $mg \cos \alpha + \dfrac{mv^2}{l}$. **106.** $mg \cos \alpha + \dfrac{mv^2}{l} - ma \sin \alpha$. **107.** $mg\cos \alpha - \dfrac{mv^2}{R}$. **108.** $\sqrt{gl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$ и $\dfrac{mg}{\cos \alpha}$. **109.** 1) Да; 2) нет. **110.** $2\pi \times \sqrt{\dfrac{h}{g}}$. **111.** $\dfrac{m\omega^2l}{2}$. **112.** $m\sqrt{3}$. **113.** $\left(mg + \dfrac{mv^2}{l}\right)\dfrac{b}{a + b}$ и $\left(mg + \dfrac{mv^2}{l}\right) \times \dfrac{a}{a + b}$. **114.** Нет. **115.** $\alpha = \arccos \dfrac{g}{\omega^2R}$. **116.** 1) $mg \cos\alpha - m\omega^2r \sin\alpha$; 2) $mg\sin\alpha + m\omega^2r \cos \alpha$. **117.** $m\omega^2l$ и $mg - m\omega^2l\sin\alpha$. **118.** 0,6 $m\omega^2$. **120.** $\dfrac{mv_{\text{отн}}}{M + m}$. **121.** $\dfrac{mv \cos \alpha}{M}$. **122.** $\dfrac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}$. **123.** 6 *м/сек*. **124.** $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

125. $\frac{mv}{M+m}$. 126. $2v_0\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.
127. $\frac{v_{отн}\cos\alpha}{4}$. 128. $\frac{m\omega l}{M+m}$.
129. $\frac{m\omega l\cos\alpha}{M+m}$. 130 $\frac{a-b}{4}$. 131. Никак. 132. На $\frac{2(R-r)m}{M+m}$. 133. P.
134. —4,9 *дж*. 135. 1) Реакция лестницы; 2) нет. 136. Может.
137. $\approx 160\,000$ *квт*. 138. $mgh+\frac{2mh^2}{t^2}$.
139. На высоте $h=\frac{v_0^2}{4g}$. 140. $\approx 41°$.
141. 60°. 142. 6 *см*. 143. 2 *м/сек* и 1 *м/сек*. 144. 192 *дж*. 145. $\frac{mv^2}{8}\left(3-\frac{m}{M}\right)$. 146. На $\frac{mv}{\sqrt{(M+m)c}}$.
147. $v\sqrt{\frac{M-m}{M}}$ и $v\frac{m}{M}$.
148. $\frac{2m\sqrt{gl}}{\sqrt{M(M+m)}}\sin\frac{\alpha}{2}$.
149. $\sqrt{\frac{6}{5}\frac{g}{l}(1-\cos\alpha)}$.
150. $\frac{4Mml}{4m^2-M^2}$. 151. $\sqrt{\frac{2(m_1-m_2)gs}{m_1+m_2}}$.
152. $v_1=\sqrt{\frac{2R(m_1R-m_2r)gs}{m_1R^2+m_2r^2}}$;
$v_2=\sqrt{\frac{2r^2(m_1R-m_2r)gs}{R(m_1R^2+m_2r^2)}}$.
153. $2\sqrt{\frac{(2m_1-m_2)gs}{4m_1+m_2}}$.
154. $\sqrt{2s\left(\frac{MR_2}{mrR_1}-g\right)}$.
155. ≈ 71 *об/мин*. 156. mv^2.
157. $\sqrt{\frac{2mgs}{M+m}}$. 158. $\sqrt{gl\sin\alpha}$.
159. 120 *н*. 160. Равен радиусу кольца. 161. $\frac{2}{R}\sqrt{\frac{M\varphi}{m}}$. 162. $\frac{1}{\rho}\times\sqrt{\frac{2M}{m}\frac{R_2}{R_1}\varphi}$. 163. $2\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}$.

164. $\sqrt{\frac{3g}{l}}$. 165. $\approx 7\cdot 10^{22}$ *квт·ч*.
166. $\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$.
167. $a_1=\frac{R(m_1R-m_2r)}{m_1R^2+m_2r^2}g$;
$a_2=\frac{r(m_1R-m_2r)}{m_1R^2+m_2r^2}g$. 168. $\frac{g\sin\alpha}{2}$.
169. $\frac{M}{mR}$. 170. $\frac{MR}{m(R^2+\rho^2)}$. 171. ≈ 73 *н*.
172. 0. 173. $P\operatorname{ctg}\alpha$ и $\frac{P}{\sin\alpha}$. 174 $\frac{P\operatorname{ctg}\alpha}{2}$ и $\frac{P}{2\sin\alpha}$. 175. $P\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. 176. $R=100$ *н*.
177. $R=20$ *н*. 178. $R=5$ *н*.
179. Равнодействующей нет. 180. $R=0$.
181. 20 *н* и 10 *н*. 182. 100 *н* и 50 *н*.
183. При $h<\frac{R}{\sqrt{2}}$. 184. 4683 *км* от центра Земли. 185. 90 *н* и 30 *н*.
186. 4000 *н* и 2900 *н*. 187. $\approx 39°$.
188. $\frac{P}{3}$ и $\frac{2P}{3}$. 189. 150 *н*, 513 *н* и 173 *н*. 190. $\frac{P}{2}\cos\alpha$, $\frac{P}{2}(1+\sin^2\alpha)$ и $\frac{P}{2}\sin\alpha\cos\alpha$. 191. $P\sqrt{1+\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}}$ и $\frac{P\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. 192. При наклоне $\geqslant 45°$.
193. $k\geqslant 0{,}5$. 194. $k\geqslant 1$. 195. При $\alpha\geqslant 45°$. 196. $\approx 0{,}17$ N. 197. 0,25 N.
198. $P\frac{R-r}{2R}$. 199. $P\frac{r-r'}{2R}$.
200. $\frac{PR}{30}$. 201. $\frac{PR}{24}$. 202. $M_1\frac{R_3}{R_1}$.
203. $M_1\frac{R_3}{R_1}+M_2\frac{R_3}{R_2}$. 204. $3P$. 205. Не нарушится. 206. 0,34 *н*. 207. $15\cdot 10^9$ *кг*.
208. $\approx 36\,000$ *км*. 209. $\approx 1{,}7$ *км/сек*.
211. $\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. 212. ≈ 48 *сек*.
213. ≈ 165 лет. 214. $\approx 1{,}4$ *г/см*^{3}.
215. $\sqrt{\frac{Gm}{4R}}$. 216. $\sqrt{\frac{5Gm}{4R}}$.
217. mgR. 218. $\approx 11{,}2$ *км/сек*.
219. $\approx 2{,}4$ *км/сек*. 220. $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

221. ≈ 2500 *км.* **222.** ≈ 10 *км/сек.* **223.** 5 *км/сек.* **224.** 620 *км/сек.* **225.** Кинетическая вдвое меньше. **226.** $mgh \times \times \frac{R}{R+h}$. **227.** На 64 *км.* **228.** ≈ 126 *км.* **229.** $\approx 1\%$ и $\approx 4\%$. **230.** Не будет. **231.** 1) $\approx 0{,}42$ *сек*; 2) такой же. **232.** 0,45 *сек.* **233.** 4 *см.* **234.** 5 *см.* **235.** Нет. **236.** 5 *сек.* **237.** 1 *сек.* **238.** ≈ 42 *мин.* **239.** 1 *сек.* **240.** $\approx 6{,}4$ *м/сек.*

241. $A = 5$. **242.** $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{g}$.

243. 1) $2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}$; 2) $2\pi \sqrt{\frac{l}{|g-a|}}$.

244. $2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$.

245. $2 \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$. **246.** 4 *м/сек.*

247.* 2,85 *м/сек.* **248.** $mg \sin\alpha + ma\cos\alpha$ и $mg\cos\alpha - ma\sin\alpha$. **249.** $a\cos\alpha - g\sin\alpha$. **250.** $g \operatorname{ctg} \alpha$.

251. $a > \frac{gl}{h}$. **252.** $m(g+a)h$.

253. $mgh\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)$. **254.** Сможет.

255. $\frac{F}{s}$. **256.** $\frac{F}{S-s}$. **257.** На 5 *мм.*

258. На 6,25 *мм.* **259.** ≈ 27 *см.* **260.** Не будет. **262.** Никак. **263.** Понизится. **264.** Никак. **265.** Никак. **266.** $P - \rho g HS$. **267.** $\rho g HS - P$. **268.** Под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$. **269.** $p = p_0 + \rho g \times AB$, где p_0 — атмосферное давление. **270.** Нельзя. **272.** $2{,}25 P_1 - 1{,}25 P_2$.

273. На 48 *мм.* **274.** $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$.

275. $P+P'$. **276.** $\frac{\rho g S H^2}{4}$. **277.** 3,14 *дж.*

278. На 8%. **279.** ≈ 50 *м*^{2}. **280.** Увеличится на 0,5%. **281.** 10 *см.* **282.** $\frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1 + l_2}$.

283. На 1,32%. **284.** На 0,4%. **285.** 240 *н.* **286.** На 8,38 *м.*

287. $15 \cdot 10^{15}$ *квт·ч.* **288.** $\approx 0{,}86$ *м*^{2}. **289.** 275 *кг.* **290.** Приблизительно на 26°. **291.** $\frac{mgh}{2}$. **292.** 2425 *кал.*

293. $\approx 4{,}4$ *млн. т.* **295.** $\approx 4{,}3$ *ккал.* **296.** Нет. **297.** Можно. **298.** Можно. **299.** Нет. **300.** 0°C. **301.** 12,5%. **302.** ≈ 1370 *атм.* **303.** 25 *л.* **304.** $62{,}5 \cdot 10^{-3}$. **305.** $1{,}85 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. **306.** 22 *г.* **307.** 25%. **308.** Водород. **309.** На 25%. **310.** 1,23 *кг/м*^{3}. **311.** $\rho = 0{,}044\ \mu$. **312.** 27°C. **313.** —73°C.

314. На 50%. **315.** $\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$.

316. 4800 *н/м*^{2}. **317.** $6 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. **318.** На 50 *мм.* **319.** На 10 *мм.* **320.** На 10 *мм.* **321.** Увеличивался. **322.** Уменьшалось. **323.** $4{,}23 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. **324.** 355° K. **325.** 34,5 *г* и 5,5 *г.* **326.** $\approx 0{,}78\ p$ и $\approx 0{,}22\ p$. **327.** 12 770 *н/м*^{2}. **328.** 1,59 *г/л.* **329.** 0,48 *кг/м*^{3}. **330.** 24,7% и 75,3%.

331. $\frac{m_1+m_2}{\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}}$. **332.** 28,9 *кг/кмоль.*

333. $\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$. **334.** $\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$.

335. $\frac{19p_1p_2}{8p_1+11p_2}$. **336.** Сообщалось.

337. 1) Уменьшалась; 2) да. **338.** На 300 *дж* и на 0,4°. **339.** 800 *дж/кг·град.* **340.** 600 *дж/кг* $\times$ *град.* **341.** $\approx 2{,}1°$. **342.** 917 *дж/кг* $\times$ *град.* **343.** На 0,4% и на 1,4%. **344.** 44%. **345.** 1) 100%; 2) 268%. **346.** В стакане воды. **347.** ≈ 1030. **348.** $3 \cdot 10^{-23}$ *г.* **349.** Сухой. **350.** $1{,}45 \cdot 10^{24}$. **351.** ≈ 24. **352.** На 4%.

353. $\frac{p_1p_2(n_1+n_2)}{p_1n_2+p_2n_1}$. **354.** 490 *м/сек.*

355. 2150 *м/сек.* **357.** 1370 *м/сек.* **358.** Приблизительно на 183°. **359.** 453 *м/сек.* **360.** Увеличится на 44%. **361.** 14 *н/м*^{2}. **362.** 14 *мм.*

363. $h = \frac{\sigma\cos\theta}{r\rho g}$. **364.** На h_2.

365. $p = p_0 - \frac{\rho g h}{2}$, где ρ — плотность воды. **366.** $\frac{2\sigma\cos\theta}{r}$.

367. 749 *мм рт. ст.* **368.** $\approx 69°$. **369.** ≈ 15 *см.* **370.** 1,46 *см.* **371.** $R \leqslant 0{,}6$ *мм.* **372.** $\approx 6 \cdot 10^{-6}$ *дж.* **373.** $8{,}4 \cdot 10^{-6}$ *дж.* **375.** За 175 *сек.*

376. $\approx 0{,}6$ *кг/м³*. **378.** 1426 *мм рт. ст.* **379.** 91 *г/м³*. **380.** 9,4 *г/м³*. **381.** 208 *г.* **382.** На 0,88%. **383.** ≈ 9000 *н.* **384.** Первая больше в $4{,}2 \cdot 10^{42}$ раз. **385.** 28 000 *н.* **386.** 1) $44 \cdot 10^6$ *к*; 2) за 5 лет. **387.** $R > 55$ *м.* **388.** 16 *в/м.* **389.** 1) 0; 2) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2}$; 3) $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2}$.

390. 1) 0; 2) $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. **391.** $3{,}54 \cdot 10^{-8}$ *к/м²* и $-1{,}77 \cdot 10^{-8}$ *к/м²*. **392.** $\frac{mv_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{el}$.

393. $\approx 2{,}5 \cdot 10^{-9}\%$. **394.** 24 *в.* **395.** 15 *см.*

396. $\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varphi}{R}$. **397.** $\approx 38\,000$ *в.*

398. 1) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$;

2) $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$; 3) $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2}$.

399. $U = \frac{\sigma s}{\varepsilon_0}$, где s—расстояние точки B от плоскости *2*. **400.** $U = \frac{\sigma\,|s_1 - s_2|}{\varepsilon_0}$, где s_1 и s_2 — расстояния точек A и B от плоскостей *1* и *2*. **401.** 4 *дж.*

402. 4000 *км/сек.* **403.** $\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}$.

404. ≈ 160 *м/сек.*

405. $\frac{Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 l}$.

406. 225 *м/сек.* **407.** $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж.*

408. Зарядится. **410.** $\frac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2}$.

411. 24 *в.* **412.** 26 *в.* **413.** Почти не изменился. **414.** $\varepsilon_0 ES$. **415.** $\frac{Q}{2}$.

416. 0,001 *к* и 0,003 *к.* **417.** 0,004 *к* и $-0{,}002$ *к.* **418.** $\varepsilon_0 ES$. **419.** $Q\frac{r}{2R}$.

420. $\frac{4\pi\varepsilon_0 ERr}{R - r}$. **421.** $2\pi\varepsilon_0 rE$.

422. $\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0 rE$ и $-\frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 rE$.

423. 9 млн. *км.* **424.** 10,6 *км.*

425. $\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. **426.** $\frac{2\varepsilon_0 S}{d}$.

427. $\frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$. **428.** 48 *в.*

429. $12 \cdot 10^{-5}$ *дж.* **430.** 0,0002 *дж.*

431. $\frac{CU^2}{2}$. **432.** $\frac{(\varepsilon - 1)\,Q^2}{2C}$. **433.** $\frac{Q}{2C}$.

434. Никак. **435.** Уменьшится в 9 раз.

436. $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q$. **437.** 1) $\frac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}$;

2) $\frac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2C_4}{C_2 + C_4}$. **438.** 260 *в.*

439. 100 *в.* **440.** 0,006 *дж.* **441.** 5 *в.*

442. 1 *в*, $\frac{2}{3}$ *в* и $\frac{1}{3}$ *в.* **443.** $4 \cdot 10^{-5}$ *к.*

444. $\frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3}{C_1 + C_2 + C_3}$.

445. $\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(E_1 + E_2)$.

446. CE и $\frac{CE}{2}$. **447.** CE. **448.** C_1E_1 и $C_2(E_1 - E_2)$. **449.** $\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1C_3} Q_1 + \frac{C_2}{C_3} E$. **450.** C_1E_1, $C_2(E_1 + E_2)$ и $C_3(E_1 + E_2 - E_3)$.

451. $Q_1 = C_1 \frac{C_2E_2 - (C_2 + C_3)E_1}{C_1 + C_2 + C_3}$;

$Q_2 = C_2 \frac{C_1E_1 - (C_1 + C_3)E_2}{C_1 + C_2 + C_3}$;

$Q_3 = C_3 \frac{C_1E_1 + C_2E_2}{C_1 + C_2 + C_3}$.

452. $Q_1 = C\,\frac{3E_1 + 2E_2 + E_3}{4}$;

$Q_2 = C\,\frac{E_1 - 2E_2 - E_3}{4}$;

$Q_3 = C\,\frac{E_1 + 2E_2 - E_3}{4}$;

$Q_4 = C\,\frac{E_1 + 2E_2 + 3E_3}{4}$. **453.** $2C$.

454. $6C$. **455.** $\approx 1{,}8$ *г.* **456.** $\approx 12{,}5$.

457. $\frac{2}{3}$ *ом.* **458.** 3 *ом.* **459.** 0,5 *ом.*

460. $\frac{R}{3}$. **461.** $\frac{r}{2}$. **462.** 2 *а* и 1 *а.*

463. $I_1 = I_3 = 1a$, $I_2 = 0$. **464.** $C(IR + E_1 - E_2)$. **465.** 15 *в.* **466.** 7,5 *в* и 1,5 *ом.* **467.** 18 *в* и 2 *ом*. **468.** I_1 увеличится, I_2 уменьшится. **469.** $2a$. **470.** На 50%. **471.** 3,6 *а.* **472.** 0,5 *а.* **473.** 6 *ом.* **474.** 10 *ом.* **475.** $I_1 =$

$=\frac{E_1}{R_1}$, $I_2=\frac{E_2}{R_2}$. **476.** $R_2=R_1\frac{E_2}{E_1}$. **477.** 10 *в*. **478.** Нельзя. **479.** 4 *ом* и 1 *ом*. **480.** 3 *в* и 21 *ом*. **481.** 24 *в* и 2 *ом*. **482.** 16 *в* и 2 *ом*. **483.** 35 *в* и 1,5 *ом*. **484.** $E=E_2$, $r=0$. **485.** $E\frac{R}{R+r}$ и $\frac{Rr}{R+r}$. **486.** 40 *в*. **487.** 10 *в* и 11 *в*. **488.** $r_1=5$ *ом*, $r_2=10$ *ом*, $R=10$ *ом*. **489.** $\frac{E_1+E_2}{R_1+R_2}$. **490.** $I_1=\frac{1}{3}$ *a*, $I_2=\frac{7}{3}$ *a*, $I_{AB}=2$ *a*. **491.** $I_1=10$ *a*, $I_2=20$ *a*, $I=10$ *a*. **492.** $I_1=10$ *a*, $I_2=0$, $I_3=10$ *a*. **493.** 0,007 *к*. **495.** $I_1=8$ *a*, $I_2=7$ *a*, $I_3=5$ *a*, $I_4=6$ *a*, $I_5=1$ *a*. **496.** $I_1=8$ *a*, $I_2=6$ *a*, $I_3=2$ *a*, $I_4=4$ *a*. **497.** $I_1=1{,}7$ *a*, $I_2=1{,}2$ *a*, $I_3=0{,}5$ *a*, $I_4=0{,}7$ *a*, $I_5=1{,}9$ *a*. **498.** $I_1=20$*a*, $I_2=I_3=I_4=I_7=10$ *a*, $I_5=I_6=0$. **499.** ≈ 222 рубля. **500.** $\approx 17{,}5\times 10^{12}$ *квт·ч*. **501.** ≈ 2200 *кг*. **502.** Первая. **503.** Нет. **504.** Нет. **505.** 45. **506.** Невозможно. **507.** 20 *вт*. **508.** 3 *вт* и 6 *вт*. **509.** 20 *ом*. **510.** 90 *вт*. **511.** 45 *вт*. **512.** 1) Да; 2) нет. **513.** $\frac{E^2}{4r}$. **514.** 50 *вт*. **515.** 12 *вт*. **517.** $\frac{R}{R+r}$. **518.** $\approx 67\%$. **519.** $\approx 33\%$. **520.** 37,5 %. **521.** 40 *вт*. **524.** Через 14 800 *сек*. **525.** ≈ 26 *а/дм²*. **526.** $\approx 8{,}3$ *квт·ч/кг*. **527.** Серебро. **528.** Одинаково. **529.** $9{,}65\cdot 10^7$ *к*. **530.** $1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*. **531.** С силой $F=0$. **532.** $\operatorname{arctg}\frac{\mu_0 HIl}{mg}$. **533.** BIS. **534.** Влево. **535.** Окружность. **536.** $B\frac{e}{m}$. **537.** 1836. **538.** $\approx 1{,}75\cdot 10^{11}$ *к/кг*. **540.** 20 *км/сек*. **541.** Точка *B*. **542.** $\approx 0{,}00014$ *в*. **543.** $BS\omega$. **544.** $\frac{\mu_0 Hav}{R}$. **545.** $\frac{\mu_0 Hav}{2}$. **546.** $E\frac{S_1-S_2}{S}$. **547.** *Ф*. **548.** 10^{-4} *к*. **549.** $25\cdot 10^{-6}$ *к*. **550.** 10 *a*. **551.** 1,6 *дж*. **552.** $U\sqrt{\frac{C}{L}}$. **553.** 5,6 *дж*. **554.** 1,6*a* и 1,9 *a*. **555.** $0{,}2t+0{,}002$. **556.** 0,4 *a*.

557. $I_2=0{,}01$ *a*, $I_3=2t+0{,}01$. **558.** 1 *ом*. **559.** 1000 *а/сек*. **560.** 400 *а/сек*. **561.** $26\cdot 10^{-5}$ *к*. **562.** 1000 *об/мин*. **563.** 1) 20 *a*; 2) —10 *a*. **564.** 1200 *об/мин*. **565.** 1000 *вт* и 1350 *вт*. **566.** $\frac{N}{I}$. **567.** На 44%. **569.** 640 *об/мин*. **570.** Нет. **571.** 6 *квт*. **572.** 180 *вт*. **573.** 50%. **574.** Никак. **575.** ≈ 760 *об/мин*. **576.** 120 *в* и 10 *a*. **577.** На 6%. **578.** На 10%. **579.** На 21%. **580.** Никак. **581.** Не может. **582.** $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$. **583.** ≈ 5100 *к*. **584.** 5. **585.** 5 *a*. **586.** 50 *ом*. **587.** 50 *в*. **588.** ≈ 32 *гц*. **589.** 80 *в*. **590.** 13 *в*. **591.** Станет равной $\approx 59°$. **592.** $\approx 2a$ и $\approx 57°$. **593.** ≈ 40 *в*, ≈ 126 *в* и ≈ 64 *в*. **594.** 0. **595.** Может. **596.** ≈ 7 *мкф*. **597.** 0,86 *a*. **598.** 48 *ом*. **599.** 240 *ом*. **600.** $Z=\infty$. **601.** ≈ 80 *вт*. **602.** 1) $\frac{1}{\omega^2 L}$; 2) $\frac{U_0^2}{2R}$. **603.** $\frac{U_э^2}{R}\cos^2\varphi$. **604.** 13,77 *квт*. **605.** 44°24′. **606.** 0,1*гн*. **607.** 24 *кгц*. **608.** 50 *кгц*. **609.** 0,5 *дж*. **610.** $U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$. **611.** $\approx 0{,}012$ *a*. **612.** $\approx 1{,}22\cdot 10^{-5}$ *к*. **613.** 0,01 *a*. **614.** 189 *м*. **615.** На 0,001 %. **616.** 0,1 *a*. **617.** ∞. **618.** $\frac{E_0}{R}$. **620.** $2\omega l$. **621.** $\frac{v}{2}$. **622.** 5 *см/сек*. **623.** $\approx 38°$. **624.** $\approx 63°$. **625.** 45°. **626.** 1,15. **627.** Никак. **628.** Не выйдет. **629.** $\beta=\alpha$. **630.** 1,59. **633.** Равна нулю. **634.** 1,5. **635.** 2. **636.** —70 *см*. **637.** $\frac{5}{3}$. **638.** 26 *см*. **639.** $a>101$ *F*. **640.** $a'=-60$ *см*. **641.** $a=120$ *см*. **642.** —50 *см*. **643.** В 60 *см* от точки *O*. **644.** $a'=\frac{F}{2}$. **645.** —24 *см*. **646.** (—75 *см*, —15 *см*). **647.** (75 *см*, —15 *см*). **648.** —60 *см*. **649.** Не всегда. **650.** 120 *см*. **651.** 7,5 *см* или 15 *см*. **652.** $\frac{n}{n-1}$. **653.** В два раза. **654.** На 25%. **655.** 4 *см/сек*. **656.** 60 *см*. **657.** 20 *см*. **658.** $\sqrt{h_1h_2}$. **659.** В полтора раза. **660.** Станет равным 1,6.

661. Не изменится. **662.** 2,4. **663.** В 6 раз. **664.** —3 *дптр*. **665.** —5 *дптр*. **666.** 5 *дптр*. **667.** 1) Станет равной 2 *дптр*; 2) станет равной 6 *дптр*. **668.** 0,15 *м*. **669.** 1,5. **670.** 1,8. **671.** В 20 *см* от зеркала. **672.** $a' \approx 0{,}08$ *м*. **673.** 0,25 *м*. **674.** $\frac{6}{11}$. **675.** Увеличить в 4 раза. **676.** В 40 *см* от второй линзы. **677.** В 10 *см* от второй линзы.

678. 3 *дптр*. **679.** На 40 *см*. **680.** На 5 *мм*. **681.** 187,5. **683.** ≈ 2200 *св*. **685.** В 10 000 раз. **686.** 23,04 *лк*. **687.** $2E_0$. **688.** $\approx 0{,}6\ E_0$. **689.** l. **690.** Станет равной 375 *св*. **691.** Станет равной ∞. **692.** 15 *лк*. **693.** 400 *лк*. **694.** Никак. **695.** В 9 раз. **696.** 40 *лк*. **697.** 290 *лк*. **698.** ≈ 80 *лк*. **699.** Уменьшится в 4 раза.

СОДЕРЖАНИЕ

Борис Юрьевич Коган

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ