

Гравитационное замедление времени как эффект Доплера

Оказывается эффект замедления времени в однородном гравитационном поле можно получить и без кривых мировых линий. К тому же результату приводит продольный релятивистский эффект Доплера. Получим сперва сам эффект.

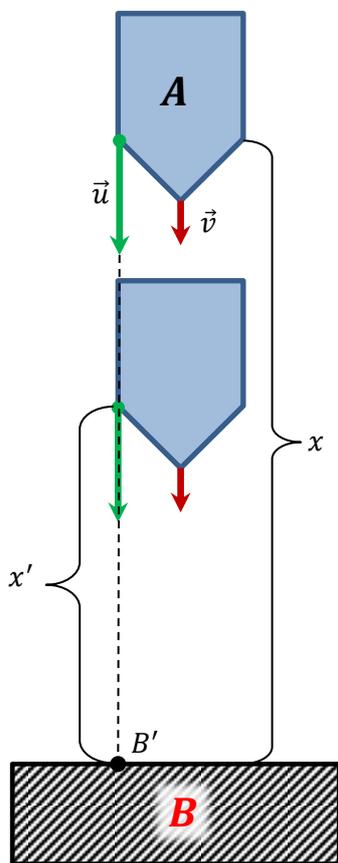


Рис. 1

Пусть ракета A (источник) движется в направлении платформы B с постоянной скоростью \vec{v} и производит быстро следующие друг за другом два выстрела пулями, летящими со скоростью $u > v$ относительно платформы (приемника) (рис. 1). Промежуток времени между выстрелами в СО платформы составляет t_1^* и он столь мал, что расстояние x от ракеты до платформы за t_1^* не успевает существенно измениться:

$$x - x' \ll x. \quad (1)$$

Время t_1^* также связано с собственным временем между выстрелами известным соотношением:

$$t_1^* = \frac{t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Если первый выстрел произведен в нулевой момент времени, по часам СО платформы, то первая пуля достигнет платформы в точке B' в момент

$$\theta = \frac{x}{u}. \quad (3)$$

Соответственно, вторая пуля достигнет платформы в момент

$$\theta' = t_1^* + \frac{x_2}{u}. \quad (4)$$

Тогда для наблюдателя на платформе промежуток между ударами пуль о платформу составит

$$t_1 = \theta' - \theta = t_1^* - \frac{x - x'}{u} = t_1^* - \frac{vt_1^*}{u} = \frac{t_2 \left(1 - \frac{v}{u}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (5) и учитывая, что

$$x - x' = vt_1^*, \quad (6)$$

получаем соотношение для продольного релятивистского эффекта Доплера при сближении источника и приемника:

$$t_1 = \frac{t_2 \left(1 - \frac{v}{u}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7)$$

Пусть теперь у нас вместо пуль фотоны¹, то есть

$$u = c, \quad (8)$$

причем

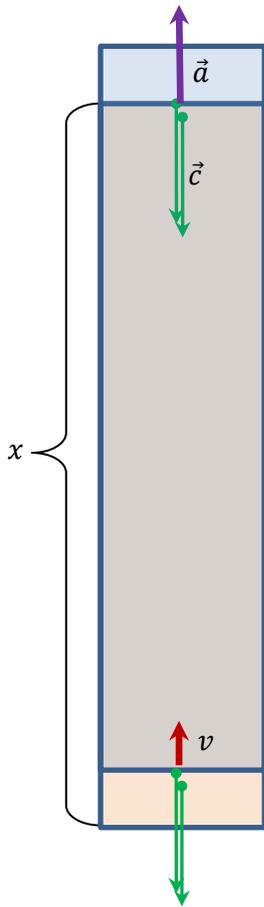
$$v \ll c. \quad (9)$$

В этом случае (7) допускает приближение:

$$t_1 \approx t_2 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (10)$$

Пусть теперь выстрел фотонами производится с потолка лифта высотой x , движущегося в ИСО с ускорением \vec{a} . Пусть далее время между выстрелами ничтожно по сравнению со временем движения фотона:

$$t_2 \ll \theta. \quad (11)$$



Зададим ИСО-1, сопутствующую лифту во время производства выстрелов (скорость ее относительно лифта в это время можно принять равной нулю). Когда фотоны достигнут пола лифта, лифту будет сопутствовать уже другая ИСО-2, движущаяся относительно ИСО-1 со скоростью

$$v = a\theta = \frac{ax}{c} \ll c. \quad (12)$$

Это равносильно встречному движению источника относительно приемника в эффекте Доплера. Тогда, подставив (12) в (10), приходим к выводу, что промежуток времени между регистрацией фотонов детектором, расположенным на полу лифта составит

$$t_1 \approx t_2 \left(1 - \frac{ax}{c^2}\right). \quad (13)$$

В силу принципа эквивалентности, аналогичное временное соотношение должно иметь место и в однородном гравитационном поле, напряженность которого $\vec{g} = -\vec{a}$ и направлена от потолка к полу. Таким образом, искомое гравитационное соотношение имеет вид:

$$t_1 \approx t_2 \left(1 - \frac{gx}{c^2}\right). \quad (14)$$

В реальном гравитационном эксперименте (и такие проводились), «потолком» «лифта» может быть крыша небоскреба, а его «полом» – подвальные этажи здания. И если сквозь вертикальную шахту стрелять с крыши фотонами с интервалом t_2 , то детектор в подвале будет регистрировать их с интервалом t_1 , связанным с t_2 соотношением (14). Единственным объяснением такому результату может быть то, что часы в подвале идут медленнее, чем на крыше, другими словами, гравитационное поле замедляет время. По прошествии достаточного времени (по любым часам) часы натикают заметную разницу, и показания можно будет сверить, проверив тем самым выводы ОТО.

¹ В качестве событий, можно взять также моменты времени между двумя последовательными максимумами напряженности электромагнитной волны в одной точке пространства, тогда получим классическое выражение для продольного релятивистского эффекта Доплера, но нас оно в данный момент не интересует.

Соотношение, обратное (14), можно получить, используя цепочку приближений, а именно:

$$t_2 \approx \frac{t_1}{\left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)} \approx t_1 \left(1 - \frac{ax}{c^2}\right)^{-1} \approx t_1 \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right). \quad (15)$$

(15), конечно, может быть получено и путем рассмотрения эффекта Доплера для приемника, удаляющегося от источника, аналогично случаю сближения. В любом случае получим замедление хода часов в направлении гравитационной напряженности, удовлетворяющее дифференциальному соотношению

$$dt = \frac{gt}{c^2} dx \quad (16)$$

совпадающему с полученным ранее.