

Перемещение как площадь под графиком. Перемещение в равноускоренном движении

Определенный интеграл. Графический смысл перемещения.

Если тело движется прямолинейно и равномерно, то для определения перемещения тела достаточно знать его скорость и время движения. Но как подойти к решению этой задачи при произвольном движении тела? В общем случае можно разбить всю траекторию, на столь малые, *элементарные*, участки, что скорость тела на каждом из них можно считать постоянной (рис.1).

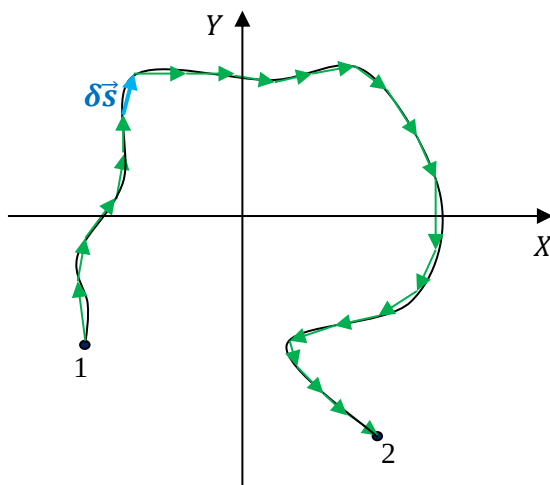


Рис. 1

Тогда полное перемещение будет равно сумме элементарных перемещений:

$$\vec{s} = \sum_{\text{точка 1}}^{\text{точка 2}} \delta \vec{s} = \sum_{\text{точка 1}}^{\text{точка 2}} \vec{v} dt \quad (1)$$

Соотношения типа (1) в физике принято записывать иначе. Введем следующее определение:

Сумма, как правило, большого количества малых (элементарных) величин называется в физике *определённым интегралом* и обозначается символом - $\int$.

С помощью символа интеграла (1) можно записать в виде

$$\vec{s} = \int_{t.1}^{t.2} \delta \vec{s}. \quad (2, a)$$

Или еще проще, указав граничные значения времени:

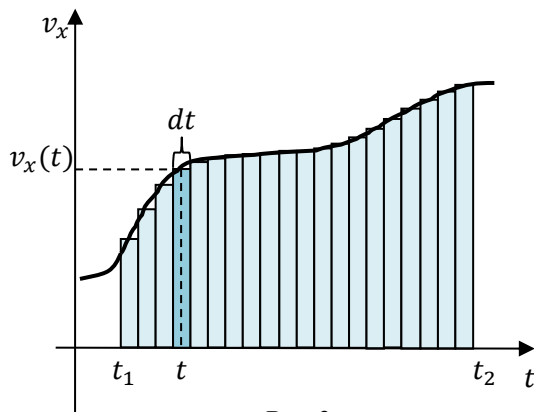


Рис.2

$$\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt. \quad (2, б)$$

В проекции на некоторую ось X (2, б) примет вид:

$$s_x = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt. \quad (3)$$

Как видим из рис. 2, проекция элементарного перемещения $\delta s_x = v_x dt$ численно равна площади

вертикального столбика. Для наглядности на рисунке он изображен более темным, нежели остальные, но выбран абсолютно произвольно. Тогда, согласно (3), проекция полного перемещения будет численно равна сумме площадей всех таких столбцов, заключенных в промежутке между t_1 и t_2 . Но «толщина» каждого столбца (время dt) может быть сделана сколь угодно малой. А, стало быть, площадь фигуры из столбцов сколь угодно точно совпадает с площадью криволинейной трапеции, ограниченной графиком скорости, граничными значениями времени и самой осью времени. Ее принято называть *площадью под графиком*. Помимо размерности, площадь под графиком от геометрической площади может отличаться знаком. Так будет, если проекция скорости на интересующем нас участке отрицательна. И наконец, если проекция скорости меняет знак, то площадь под ее графиком, очевидно, равна алгебраической сумме площадей участков графика, расположенных под и над осью времени. Поэтому, чтобы отличать физическую площадь под графиком от геометрической мы так и будем называть ее — *физической площадью под графиком*.

Таким образом:

Проекция перемещения равна физической площади под графиком проекции скорости.

Равнопеременное (равноускоренное) движение.

Основная формула перемещения.

Движение, происходящее с постоянным ускорением, называется равнопеременным или равноускоренным:

$$\text{РУД} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = \text{const} \quad (4)$$

Поскольку (4) выполняется для любого промежутка времени t , то любое приращение скорости $\vec{v} - \vec{v}_0$ (и сам временной промежуток) в РУД является элементарным. Таким образом, в равноускоренном движении среднее ускорение совпадает с мгновенным, поэтому здесь можно говорить просто об ускорении, не уточняя, о чем именно идет речь.

Как видим из (4), для равнопеременного движения справедлив закон скорости:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (5, a)$$

Используя свойства проекций векторов, легко прийти к выводу, что аналогичным образом выглядит и закон проекции скорости в РУД:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \quad (5, б)$$

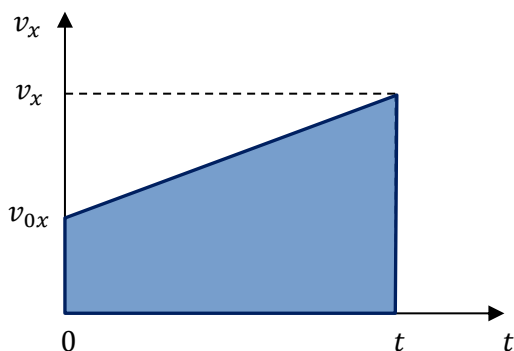


Рис. 3, а

Получим формулу проекции перемещения в равноускоренном движении. Как видим из рис. 3, проекция перемещения численно равна площади трапеции:

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \quad (6, a)$$

Как видим, результат получается легко, если интересующий нас участок графика проекции скорости расположен над осью времени. Не сильно сложнее случай, когда участок расположен целиком под осью времени. Если же график пересекает ось времени, для определения проекции перемещения, необходимы дополнительные ухищрения. Тем не менее, и здесь результат будет таким же. Предлагаем подумать над этой задачей самостоятельно.

Очевидно, полученная нами формула верна также для любой другой проекции перемещения. Скажем

$$S_y = \frac{v_{0y} + v_y}{2} t. \quad (6, б)$$

Но тогда должно выполняться и векторное равенство:

$$\vec{S} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} t. \quad (6, в)$$

Действительно, если предположить противное, то есть, что

$$\vec{S} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} t + \text{что-то еще},$$

тогда и

$$S_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t + \text{что-то еще}.$$

Другие формулы перемещения в РУД.

Для определения перемещения в РУД, в принципе, достаточно знать любые три из четырех величин: $\vec{v}_0$, $\vec{v}_{\text{конеч}}$, $\vec{a}$ и t . Таким образом, возможны 4 формулы с их участием, одну из них мы уже получили. Но в конкретной задаче, более удобной может оказаться какая-либо другая формула. Поэтому получим три оставшиеся формулы перемещения в РпД.

Формула без конечной скорости.

Выразим из (4) $\vec{v}$ и подставим в (6, в), получим:

$$S_x = v_{0x} + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (7, a)$$

Или в векторном виде:

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \quad (7, б)$$

Формула без начальной скорости.

Выразим из (4) $\vec{v}_0$ и подставим в (6, в), получим:

$$S_x = v_{0x} + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (8, a)$$

Или в векторном виде:

$$\vec{S} = \vec{v}t - \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (8, б)$$

Формулы (7, а) и (8,а) можно получить также графически. Для этого можно разбить трапецию под графиком скорости на прямоугольник с высотой v_{0x} и прямоугольный треугольник с высотой $v_x - v_{0x}$. Сложив их площади, получим (7, а). Если же из площади прямоугольника высотой v_x вычесть площадь белого треугольника (высота которого тоже $v_x - v_{0x}$), получим (8, а). Прodelайте это самостоятельно.

Формула без времени. Здесь очевидно следовало бы выразить из (4) время. Тогда получим:

$$t = \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{\bar{a}}$$

Операция деления на вектор, хотя в принципе и может быть введена в математику, но сделать это возможно различными способами, не все из которых дают однозначный результат. Чтобы, ради одной формулы, не создавать целый раздел математики, перейдем в (4) к проекциям:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

Выразим из последней формулы t и подставим в (6,а). Получим

$$S_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \quad (9)$$

Пользуясь (9), следует помнить, что X может быть любой осью, но не перпендикулярной ускорению. Действительно, поскольку в последнем случае знаменатель (да и числитель) (9) обращается в 0, перемещение в этом случае становится неопределимым из (9). Данное ограничение, однако, не распространяется на остальные формулы перемещения.

Уравнение РУД

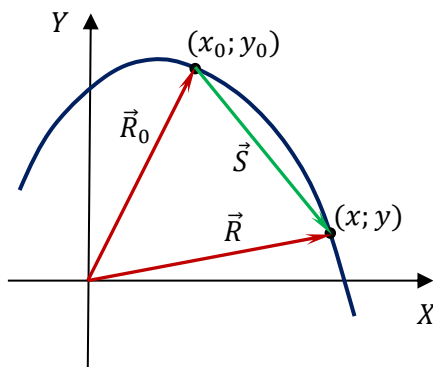


Рис. 4

Пусть материальная точка совершает РУД (не обязательно прямолинейное — рис. 4). Согласно (7, б) и рисунку

$$\vec{R} - \vec{R}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Отсюда

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (10)$$

Это и есть уравнение РУД в векторном виде. Проецируя на оси (то есть, используя свойства 1, 2, 3 и 5), получим уравнение РУД в координатном виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Координатные уравнения можно получить и напрямую из (7, а), если учесть, что согласно свойству 2, проекции вектора перемещения на оси задаются соотношениями:

$$\begin{aligned}s_x &= x - x_0, \\ s_y &= y - y_0.\end{aligned}$$

В принципе аналогичное уравнение можно получить и для координаты z , но вектор скорости РУД, в любой момент времени лежит в плоскости, содержащей векторы начальной скорости и ускорения. Стало быть, равнопеременное движение всегда является плоским: если начальная скорость тела коллинеарна ускорению, траекторией будет прямая, в остальных случаях — это парабола. В последнем легко убедиться, направив одну из осей коллинеарно ускорению. Пусть, скажем, $\vec{a} \downarrow \uparrow Y$. Совместим также начало координат с начальным положением тела. Тогда

$$\begin{cases} x = v_{0x}t, \\ y = v_{0y}t - \frac{at^2}{2}. \end{cases} \quad (12, а)$$

Выражая время из первого уравнения, и подставляя во второе, получим:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{a}{2v_{0x}^2}x^2. \quad (12, б)$$

Соотношение (12) задает квадратичную функцию, следовательно, траекторией криволинейного РУД является парабола.

Вопрос: где в (12, а) (или (12, б)) заложена криволинейность движения?