Проекции вектора и их свойства

Назовем вектор коллинеарным данной оси, если он сонаправлен, либо противонаправлен этой оси.

Аналогичным образом определим коллинеарность векторов друг другу.

Важнейшим понятием механики и вообще физики является проекция вектора на координатную ось.

Проекцией вектора на ось декартовой системы координат называется длина его составляющей, коллинеарной этой оси, взятая в соответствии с правилом знаков.

Правило знаков:

- **проекция положительна, если составляющая сонаправлена оси;**
- **проекция отрицательна, если составляющая противонаправлена оси;**
- **проекция равна нулю, если составляющая равна нулю.**

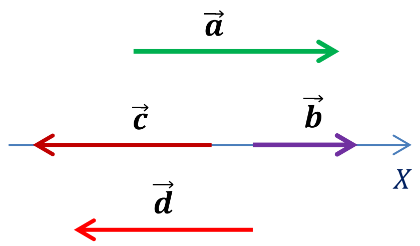

Рис. 1. Векторы, коллинеарные оси X.

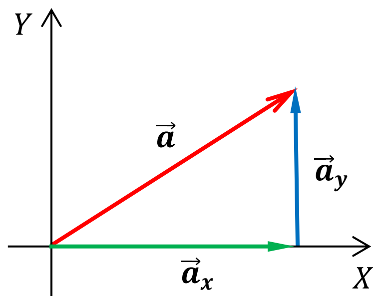

Рис. 2. Разложение вектора на составляющие, коллинеарные осям (каждая одной).

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось X обозначается как a_x. Используя это обозначение, можно записать определение проекции в виде лаконичной формулы:

$$a_x = \left[\begin{array}{ll} |\vec{a}_x| & \Leftarrow \vec{a}_x \rightrightarrows X, \\ -|\vec{a}_x| & \Leftarrow \vec{a}_x \leftrightarrows X, \\ 0 & \Leftarrow \vec{a}_x = 0. \end{array}\right. \qquad (0)$$

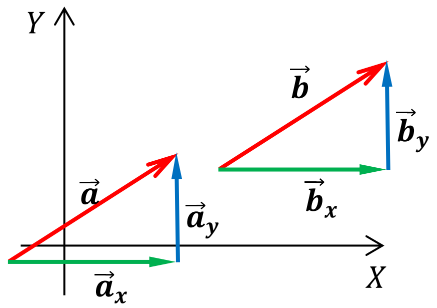

Рис. 3. Иллюстрация свойства 1.

Основные свойства проекций.

1. **Равные векторы, имеют равные соответствующие проекции. И наоборот, если соответствующие проекции векторов равны, то и сами векторы равны:**

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y. \end{cases} \qquad (1)$$

Это свойство, думается, очевидно. Из него, в частности, следует, что, если мы возьмем вектор и перенесем его в другую область пространства, не меняя направления и длины (осуществим параллельный перенос), то это никак не повлияет на проекции вектора.

2. **Проекция вектора на любую координатную ось равна разности соответствующих координат его конца и начала:**

$$\boldsymbol{a_x = x_2 - x_1}. \tag{2}$$

Доказательство.

1. Вектор направлен под острым углом к оси X.
   В этом случае $a_x = |\vec{a}_x| = x_2 - x_1$.

2. Вектор направлен под тупым углом к оси X.
В этом случае $|\vec{a}_x| = x_1 - x_2$. Но $a_x = -|\vec{a}_x| = x_2 - x_1$.

3. Вектор перпендикулярен оси X.
В этом случае $x_1 = x_2$. Но $a_x = 0 = x_2 - x_1$.

Удобство свойства 2. состоит в том, что (2) выполняется не зависимо от того как направлен вектор — по или против оси. Этим мы и воспользуемся.

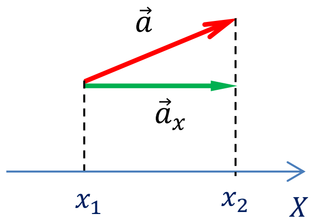

Рис. 4, а. Проекция вектора, направленного под острым углом к оси X.

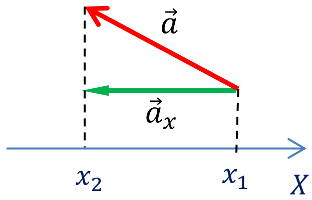

Рис. 4, б. Проекция вектора, направленного под тупым углом к оси X.

3. **Проекция суммы векторов на определенную ось равна сумме проекций этих векторов на эту ось:**

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{c_x = a_x + b_x}, \\ \boldsymbol{c_y = a_y + b_y}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Поскольку параллельный перенос не меняет проекций векторов, то разместим их, в соответствии с правилом треугольника (рис. 5, а). Если проекции всех векторов на ось X положительны, то для них свойство 3. очевидно. Но если хотя бы одна из проекций отрицательна, то увидеть выполнение 3. будет уже не столь легко, хотя и возможно. Следуя таким наглядно-геометрическим путем, нам придется рассмотреть все возможные случаи. К счастью есть более короткий, хотя и более формальный путь. Как бы ни были расположены векторы, их концы имеют какие-то координаты (рис. 5, б). Согласно свойству 2

$$a_x = x_2 - x_1,$$
$$b_x = x_3 - x_2.$$

Тогда $a_x + b_x = x_3 - x_1 = c_x$, что и требовалось доказать. y-проекции рассматриваются аналогично.

Мы доказали (3) в одну сторону ($\Rightarrow$, то есть справа налево). Но, заметим, что в (3) поставлен знак $\Leftrightarrow$, а не $\Rightarrow$. Это значит, что из системы скалярных равенств правой части (3) следует векторное равенство в его левой части. Это легко доказывается методом от противного. Действительно пусть

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x, \\ c_y = a_y + b_y; \end{cases}$$

но при этом

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d},$$

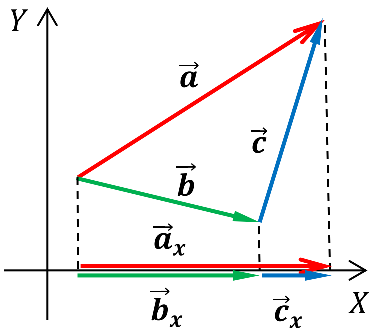

Рис. 5, а. Проекция суммы — частный случай.

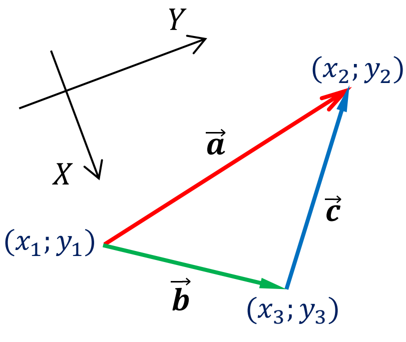

Рис. 5, б. Проекция суммы — к доказательству общего случая.

где $\vec{d}$ — некоторый ненулевой вектор. Тогда, аналогично тому, как мы это проделали выше, доказываем, что

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x + d_x, \\ c_y = a_y + b_y + d_y; \end{cases}$$

причем хотя бы одна из проекций вектора $\vec{d}$ должна быть отличной от нуля. Полученное противоречие доказывает (3) справа налево. Свойство (3) теперь полностью доказано.

Очевидно (3) можно распространить на произвольное число слагаемых.

4. **Проекция разности двух векторов равна разности соответствующих проекций уменьшаемого и отнимаемого:**

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{c_x = a_x - b_x}, \\ \boldsymbol{c_y = a_y - b_y}. \end{cases} \qquad (4)$$

Доказательство.

Можно действовать аналогично (3). Но поскольку (3) уже доказано, это делает возможным еще одно, весьма красивое доказательство (4), представляющее собой цепочку эквивалентных утверждений:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} + \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_x = c_x + b_x \\ a_y = c_y + b_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x, \\ c_y = a_y - b_y. \end{cases}$$

(Или можно действовать так же как при доказательстве свойства 3.)

5. **При умножении, или делении, вектора на число, его проекция множится (делится) на это же число:**

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b_x = \lambda a_x}, \\ \boldsymbol{b_y = \lambda a_y}. \end{cases} \qquad (5)$$

Доказательство.

Если $\vec{a}_x \rightrightarrows X$ а $\lambda > 0$, то $\vec{b}_x \rightrightarrows X \Rightarrow b_x = |\vec{b}_x| = |\lambda||\vec{a}_x| = \lambda a_x$ (рис. 6, а, использовано подобие треугольников, λ — коэффициент подобия).

Если $\vec{a} \rightrightarrows X$ а $\lambda < 0$ то $\vec{b}_x \leftrightarrows X \Rightarrow b_x = -|\vec{b}_x| = -|\lambda||\vec{a}_x| = \lambda a_x$, так как, при $\lambda < 0$, $|\lambda| = -\lambda$ (рис. 6, б).

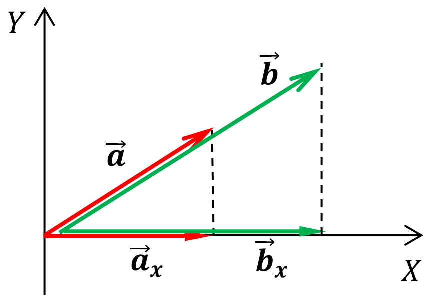

Рис. 6, а. Проекция умножения вектора на число: $\vec{a}_x \rightrightarrows X, \lambda > 0$.

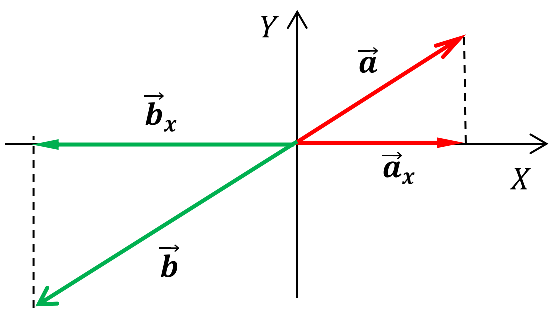

Рис. 6, б. Проекция умножения вектора на число: $\vec{a}_x \rightrightarrows X, \lambda < 0$.

Остальные случаи и деление на число рассматриваются аналогично. Предлагаем сделать это самостоятельно.